

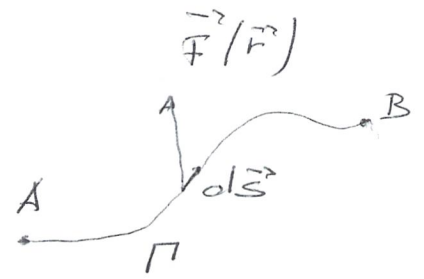
Visto lavoro di forza

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$$

per chi non ama $\int$

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i$$



attenzione qui
non necessar. $\vec{F}(x, y, z)$

W_{AB} dipende in generale da traiettoria Γ

• abbiamo visto esempio di $\vec{F}$ attrito in cui W è prop. a lunghezza traiettoria: $\mu_D N \cdot l$

• lavoro di forza viscosa dip. da vel. lungo
traiettoria vista? $\vec{F}_v = -\gamma \vec{v}$

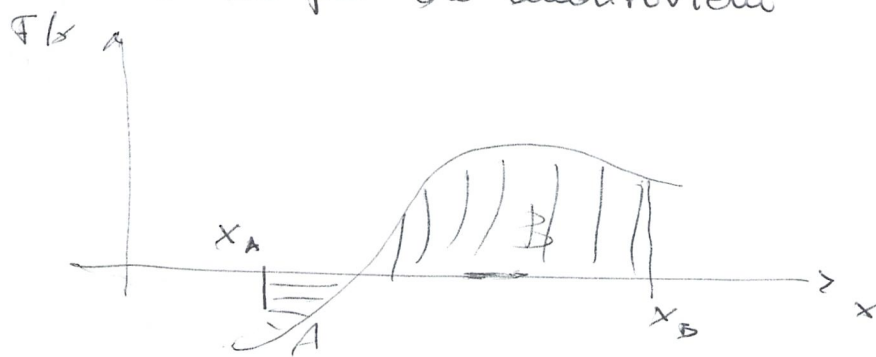
Sono esempi di $\vec{F}$ non dip. da posizione.

Potrei allora pensare che lavoro non dip. da traiettoria. È vero in 1-dim

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x) dx = U(x_B) - U(x_A)$$

$$\text{con } F(x) = \frac{dU}{dx}$$

non importa se lungo il percorso $x_A \rightarrow x_B$
laccio un pò di andirivieri



$\int$ è area B -
area A

12/11/12

(2)

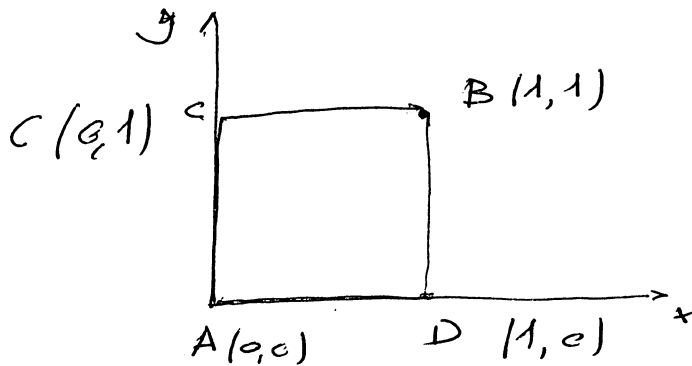
ma in 2 e più dimensioni

questo in generale non è vero in ≥ 2 -dim

Ad esempio: $\vec{F}(x, y) = 3y \hat{i} + 2x \hat{j}$

$$F_x = 3y$$

$$F_y = 2x$$



$$\Gamma_1: A \rightarrow C \rightarrow B$$

$$\Gamma_2: A \rightarrow D \rightarrow B$$

$$\begin{aligned} W_{AB \Gamma_1} &= W_{AC} + W_{CB} = \int_A^C (F_x dx + F_y dy) + \int_C^B F_x dx + F_y dy \\ &= \int_A^C F_y dy \quad (\text{perché } dx = 0) + \int_C^B F_x dx \\ &= 0 + 3 \cdot 1 = 3 \text{ (J)} \end{aligned}$$

o anche $= F_y \Delta y$ con $F_y = 2x = \text{cost} = 0$

$$W_{AB \Gamma_2} = 0 + 2 \cdot 1 = 2 \text{ J}$$

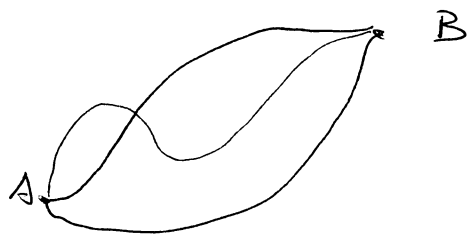
ho risultati diff. per i due percorsi per $\vec{F}$ dip. solo da posizione

Se avessi avuto $\vec{F} = \begin{cases} F_x = 3y \\ F_y = 3x \end{cases}$

$$\begin{cases} F_x = 3x \\ F_y = 2y \end{cases}$$

avrei ottenuto ris. uguali per i due percorsi $A \rightarrow B$ e per qualunque perc. $A \rightarrow B$

Supponiamo di avere $\vec{F}(x,y) \neq 0$ (3)



W_{AB} sia indipendente dal percorso
comunque io scelga il percorso

Supponiamo anche che questo valga
per tutti i punti ~~B~~ dello spazio

Questo allora mi consente di definire
una funzione scalare in ogni punto $B(x,y)$
dello spazio come:

$$U_A(x,y) = U(B(x,y)) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} = W_{AB} \text{ (indip. da percorso)}$$

$\vec{F}$ una funzione scalare che dip. solo
dalla posizione e dalla mia scelta
iniziale di A , ha dim di energia (lavoro)

$$[U] = [F] \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \text{ (Joule)}$$

Che succede se cambio punto di
riferimento? $A \rightarrow C$



$$W_{AB} = U_A(B)$$

$$W_{AC} = U_A(C)$$

ma W_{ACB}

$$U_A(B) = W_{ACB} = U_A(C) + W_{CB}$$

$$\Rightarrow W_{CB} = U_A(B) - U_A(C)$$

(4)

Quindi anche W_{CB} è univocamente determinato dalla scelta di C e di B
allora posso definire

$$U_C(B) = W_{CB} \text{ indep. da percorso}$$

~~e rispe e~~

$$U_C(B) = U_A(B) - U_A(C)$$

Quindi se W_{AB} è indep. da cammino $\forall B$ allora:

- $\exists$ funzione scalare $U_A(B) = W_{AB}$
- è indep. da cammino anche W_{CB} per ogni C e B
- La funzione scalare del punto $B(x, y)$ è definita a meno di costante che dipende da arbitrarietà di punto di riferimento
 - • se cambio riferimento

$$U_C(B) = U_A(B) - U_A(C)$$

Notiamo inoltre che in generale

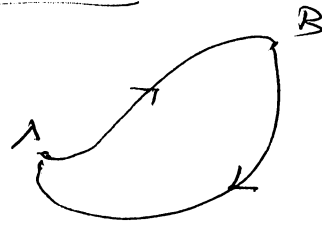
$$W_{AB_\Gamma} = \int_{A_\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{S}_\Gamma = -W_{BA_\Gamma} = \int_{B_\Gamma}^A \vec{F} \cdot d\vec{S}_\Gamma$$

perché $\vec{F}$ è la stessa in ogni punto di Γ ma $d\vec{S} \rightarrow -d\vec{S}$

Allora se W_{AB} indep. da Γ

$$W_{AB} = 0$$

lungo qualunque
cammino chiuso per A e B.



e se W_{AB} indep. da cammino $\forall B$

allora $\oint \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall$ cammino chiuso

lungo circuito chiuso

Vale anche il viceversa

- Si dimostra (ho quasi dimostrato) che le ~~tre~~ condizioni

1. $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} = U_A(B)$ non dip. da cammino $\forall B$

2. $W_0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \forall$ cammino chiuso
sono equivalenti

Se vogliamo di queste condizioni allora
definisco:

Energia potenziale di $\vec{F}$ in B

$$V_A(B) = -U_A(B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Le forze che ammettono energia potenziale
si dicono forze conservative

|| Energia potenziale è definita a meno
di costante arbitraria

(6)

$\vec{F}(x, y, z) \rightarrow$ vettore

$V(x, y, z) \rightarrow$ scalare ~~definita~~
per come è definita posso
aggiungere o togliere costante
arbitraria

$\rightarrow$ $\leftarrow$ posso inserire qui p. (8)

se ho $z = f(x, y)$

posso costruire funzione di 1 variabile

$$g_y(x) = f(x, y = y_0)$$

se questa è derivabile

$$g'_y(x) = \frac{d g_y(x)}{dx}$$

se questo vale $\forall y$ ho univocamente funzione
di due variabili

$$h(x, y) = g'_y(x) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{derivata parziale di } f(x, y) \text{ risp. } x$$

analogamente introduco $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

poi, se posso, proseguo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

$$\text{ecc.} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

(8)

visto $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_k = E_k(B) - E_k(A)$

se $\vec{F}$ conservativa

$$W_{AB} = U(B) - U(A) = - (V(B) - V(A)) = - \Delta V = \Delta E_k$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_k + \Delta V = 0}$$

in presenza di ~~for~~ sole forze conservative
l'energia meccanica totale $E_T = E_k + V$
si conserva

• Qui occorrono esempi

In presenza di $F_{n.c.}$ vale in generale

$$\Delta E_k = W_{cons} + W_{n.c.} = - \Delta V + W_{n.c.}$$

$$\boxed{\Delta E_k + \Delta V = W_{n.c.}}$$

variazione di energia meccanica totale
= lavoro $F_{n.c.}$

Data funzione scalare $f(x, y, z)$ (7)

derivabile, ecc. ecc. introduco operatore vettoriale

$$\text{gradiente: } \vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \\ = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

Se forza $\vec{F}(x, y, z)$ è conservativa allora

$$\vec{F}(x, y, z) = - \vec{\nabla} V(x, y, z)$$

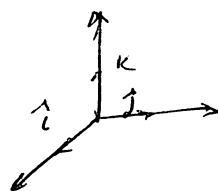
(Varie proprietà di operatore $\vec{\nabla}$ rimandate)
(a statica dei fluidi)

- Si dimostra $\vec{F}(x, y, z)$ è conservativa
se e solo se $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$, ecc...

(si vedrà perché ad analisi II)

• Forza peso $\vec{F}_p = -mg \hat{k}$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = -mg \end{cases}$$



~~Se~~ tutte le derivate parziali sono nulle, quindi tutte uguali $\Rightarrow$ è conservativa

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{z_A}^{z_B} F_z dz = -mg(z_B - z_A)$$

$$V_0(z) = - \int_{z_0}^z \vec{F} \cdot d\vec{s} = mg(z - z_0)$$

$$h = z - z_0 \Rightarrow V(z) = mgh$$

$\rightarrow$ qui esprimere $\vec{F}_p = -\vec{\nabla}(mg(z - z_0))$

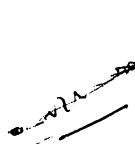
• Forza attrito e F_r non dip da (x, y, z)
 $\Rightarrow$ non cons

• Forza elastica — q.s. it. 13/11 p. 9

- 1.° $\vec{F} = -Kx$

olip. da pos $\rightarrow$ cons.

- 2.°



$$\vec{F} = -K\vec{r}$$

$$= -K(x\hat{i} + y\hat{j})$$

$$\begin{cases} F_x = -Kx \\ F_y = -Ky \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \text{conservativa}$$

Scegl. come rif. l'origine

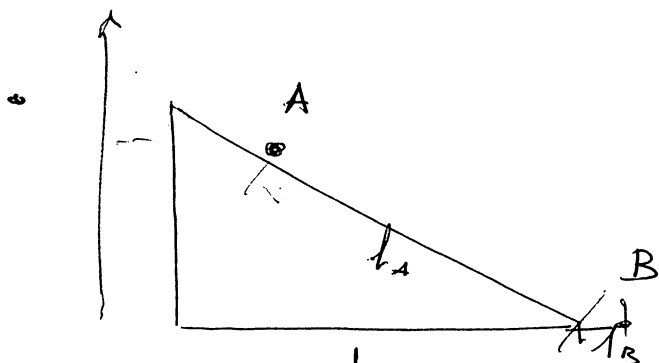
$$W_{0R} = \int_0^R \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^R F(r) dr = -\frac{1}{2}KR^2$$

$$\Rightarrow V(r) = +\frac{1}{2}Kr^2 = +\frac{1}{2}K(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = kx \quad \frac{\partial V(r)}{\partial y} = ky$$

(10)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_x = -kx \\ \vec{F}_y = -ky \end{cases}$$



Se ho solo $\vec{F}_p \rightarrow$ solo $\vec{F}_{conserv.}$

$$\Delta E_k + \Delta V = 0$$

$$\Delta E_k = -\Delta V = m g (z_A - z_B) = m g h_A$$

$$\frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = m g h_A$$

$$v_B^2 = 2 g h + v_A^2$$

Se ho anche forze di attrito

$$\Delta E_k + \Delta V = W_{Attr.}$$

ma attenzione, mi fermo dove $v^2 = 0$

$$-W_{Attr.} < \Delta V + E_{kin}$$

Se voglio il punto in cui si ferma

$$W_{Attr.} = -(\Delta V + E_{kin})$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ indep. da } \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

$\Rightarrow$ posso definire funzione scalare della posizione $V(\vec{r})$

$$W_{AB} = -(V(B) - V(A))$$

Si può dimostrare che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right)$$

Si dimostra che vale anche il viceversa

$$\text{se } \exists V(\vec{r}) \text{ t.c. } \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{F} \text{ è conservativa}$$

inscrivere
qui es
fel p. 9

quello che si vedrà in analisi II e

$$\text{che se } \vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= dV \end{aligned}$$

quindi

$$W_{AB} = \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

differenziale esatto

ma non è questo che interessa ora

Statica di particella

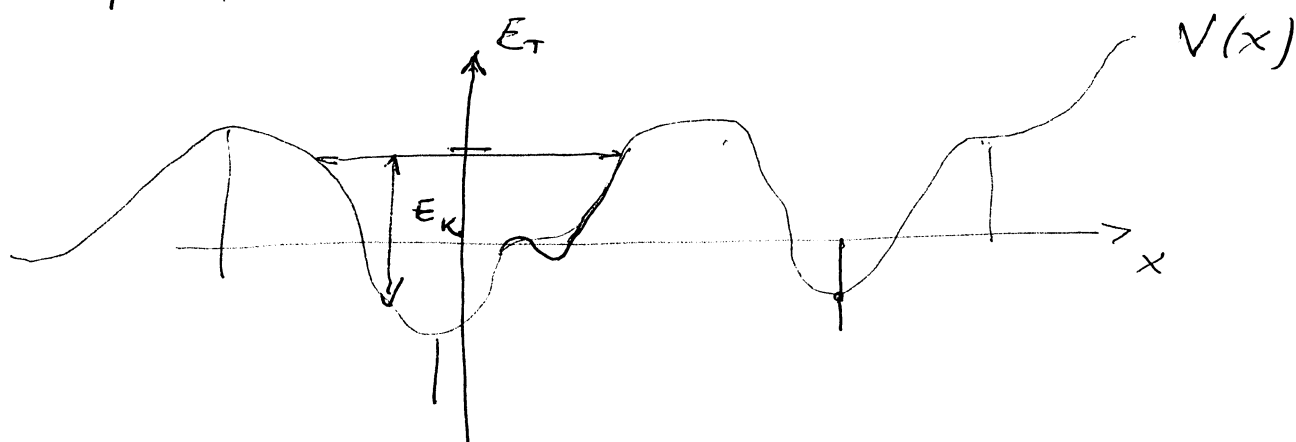
$$\sum \vec{F} = 0$$

Supponiamo che agiscano solo $\vec{F}$ conservative
ma che $E_{kin} > 0$

Allora $E_T = E_k + V = \text{cost.}$ ($\Delta E_T = 0$)

In 1-dim posso tracciare grafico

$$E_T - x$$



max, minimi e flessi ~~solo~~ di $V(x)$

sono punti in cui $F_x = 0 = -\frac{dV}{dx}$ equilibrio

tuttavia solo nei minimi ho

equilibrio stabile: se aumento di poco

$$E_T \text{ risp. a } V_{\min} = V(x_0) \quad E_T = V(x_0) + \delta E$$

le forze richiamano part. vs. x_0

(~~oppure spos~~ può corrispondere a spostamento
statico di δx)

$$F(x_0 + \delta x) = -|F| \hat{x} = - \left| \frac{dV(x_0 + \delta x)}{dx} \right| \hat{x}$$

$$F(x_0 - \delta x) = +|F| \hat{x} = + \left| \frac{dV(x_0 - \delta x)}{dx} \right| \hat{x}$$

$$\circ \frac{dV(x_0 + \delta x)}{dx} > 0 \quad \frac{dV(x_0 - \delta x)}{dx} < 0$$

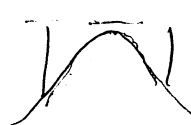
Allora a max relativo ho

(13)

$$-\frac{dV(x_H)}{dx} = 0 \quad \text{equilibrio}$$

$$-\frac{dV(x_H + \delta x)}{dx} > 0 \quad F_x > 0 \rightarrow \text{allontana da } x_H$$

$$-\frac{dV(x_H - \delta x)}{dx} < 0 \quad F_x(x - \delta x) < 0 \rightarrow \text{allontana da } x_H$$

 ← allontanarsi da pos. di equilibrio E_K aumenta

È interessante punto di minimo x_0

$$\left. \begin{aligned} F(x_0 + \delta x) &= -\frac{dV(x_0 + \delta x)}{dx} < 0 \\ F(x_0 - \delta x) &= -\frac{dV(x_0 - \delta x)}{dx} > 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} F \text{ richiama} \\ \text{vs. } x_0 \end{array}$$

Si vedrà verso fine semestre Analisi I

$f(x)$ continua e derivabile finché ~~sempre~~ a tutti gli ordini in intorno di x_0

$$f(\text{espresso}) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{6} (x - x_0)^3 f'''(x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$$

Allora ~~sviluppare~~ $V(x)$ in intorno di x_0

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{(x - x_0) \frac{dV(x_0)}{dx}}_{=0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \underbrace{\frac{d^2 V(x_0)}{dx^2}}_{>0} + \text{termini ordine sup } i (x - x_0)^i$$

In intorno suff. piccolo di posizione di equilibrio stabile l'en. potenziale è

$$V(x) = \underbrace{V(x_0)}_{\text{costante}} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d^2 V(x_0)}{dx^2}}_{\text{irrelevante}} (x - x_0)^2$$

è, ~~a meno della costante~~ l'en. potenziale di forza elastica con origine in x_0

$\Rightarrow$ particelle in ~~posizione~~ intorno suff. piccolo di posizione di equilibrio stabile sono soggette a forza elastica che le richiama vs. equl.

$\rightarrow$ è quel che succede a pendolo mi aspetto quindi che pendolo per oscillazioni "piccole" si comporti come part. collegata a molla

Vediamo equazione del moto in 1-dim

$$F = ma$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K}{M} x = 0$$

devo trovare $x(t)$ t.c. la sua derivata seconda sia $-\frac{K}{M} x(t)$

riscrivo : $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$ (sia K che M sono > 0)

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

OAS

A parte dover aspettare Analisi II, noto:

- compare $\frac{d^2 x}{dt^2} \rightarrow$ doppia integrazione
 $\rightarrow$ ogni integrazione introduce cost. arb.
 $\rightarrow$ sol. generale contiene 2 cost. arb.
 $\rightarrow$ costanti arb. univocamente determ. da $\frac{dx(t=0)}{dt} = v_0$ e $x(t=0) = x_0$
 o ad altro tempo qualsiasi

- equazione è omogenea
 - equazione è lineare
- $\Rightarrow$ se $x_1(t)$ è sol. e $x_2(t)$ è sol.
 $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è ancora sol.

$\cos(\omega_0 t + \varphi)$ è sol.

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\cos$ è sol. $\sin(\omega_0 t + \varphi)$

e $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

in realtà ~~ma~~ ho già così la sol. + generol.
cost. arbitrarie A, φ

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega_0 t - \sin \varphi \sin \omega_0 t$$

$$\sin(\omega_0 t + \varphi) = \cos \varphi \sin \omega_0 t + \sin \varphi \cos \omega_0 t$$

posso scrivere sol. ^{gen} sia nella forma

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

costanti arbit. (cos differisce per $\pm \pi/2$ nella costante di fase)

oppure

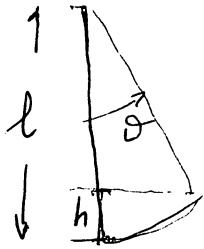
$$x(t) = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t$$

relazioni tra le due

$$\begin{cases} A^2 = a^2 + b^2 \\ \tan \varphi = \frac{b}{a} \end{cases}$$

Vediamo pendolo

OAS (3)



sceglie $V(\theta=0) = 0$

~~$V(\theta) = \frac{1}{2} m g l \theta^2$~~

$$V(h(\theta)) = m g h$$

$$h = l(1 - \cos \theta)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$$

$$h \approx l \frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow V(\theta) = \frac{1}{2} m g l \theta^2 = \frac{1}{2} \frac{m g}{l} (l \theta)^2 \quad \text{q.s. ha dim } L^2$$

è en. pot. di osc. arm (come ci aspettavamo)

con $K = m g l$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} = \frac{g}{l}$$

$$x = l \theta$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$l \theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad [A] = L$$

$$\theta(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad [a] = 1$$

di solito pendolo si risolve con $F(\theta)$
qui fatto con $V(l\theta)$ e sol. gen. di oscill.
armonico

Supponiamo che in $t=0$ $\theta(0) = \theta_0$

$$\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sin \varphi = \theta_0 \\ \omega_0 a \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} a = \theta_0 \\ a = -\theta_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t = -\theta_0 \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

14/11/12

OAS (4)

$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ è sol. generale

"condizioni iniziali" determinano costanti arbitrarie

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A \sin \varphi = x_0 \quad \sin \varphi = \frac{x_0}{A}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_0 \Rightarrow \omega_0 A \cos \varphi = v_0 \quad \cos \varphi = \frac{v_0}{A \omega_0}$$

$$\tan \varphi = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}$$

$$\boxed{A = \frac{x_0}{\sin \varphi}} \quad \sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

non funziona per $x_0 = 0$

Se $x_0 = 0$ e ~~$x(t) \neq 0$~~ $v_0 \neq 0$

$$\tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$A \omega_0 = v_0 \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Ridefinendo origine dei tempi:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t' = t + t_0$$

$$\omega_0 t' = \omega_0 t + \omega_0 t_0$$

$$\omega_0 t = \omega_0 t' - \omega_0 t_0$$

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega_0}$$

$$x(t') = A \sin \omega_0 t'$$

poi t' è nulla ...

$$x(t) = A \sin \omega_0 t$$

è funzione periodica

$$x(t+T) = x(t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \underline{\text{periodo}}$$

ω_0 pulsazione / frequenza angolare

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{frequenza}$$

con $\varphi = 0$ ha max $t = T/4$ (poi ripetuto ogni T)

min $t = \frac{3}{4}T$ "

zeri $t = 0, \frac{T}{2}, \dots$

(la 5 ~~7~~)

OAS (6)

Energia dell'oscillatore

$$x(t) = A \sin \omega_0 t$$

$$V(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2} A_m^2 \dot{x}^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} A_m^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$E_T = E_k(t) + V(t) = \frac{1}{2} A^2 m \omega_0^2 = \frac{1}{2} A^2 k$$

E_T non dip. da t ; giusto: E_T conservata

nota: $\sin^2 \omega_0 t$, $\cos^2 \omega_0 t$ hanno periodo

$$T_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

$$\langle V(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} V(t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 x dx$$

ho sostituito $x = \omega_0 t$

$$dt = \frac{dx}{\omega_0}$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

ricordando: $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

$$\langle V(t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 x dx = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} E_T = \langle E_k(t) \rangle$$

ad Analisi - II si imparerà che sol.
nel piano complesso sono del tipo: $x(t) = e^{\alpha t}$
con α complesso
sostituisco

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0 \quad \forall t$$

allora α è determinata da

$$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \alpha = \pm i \omega_0$$

due sol: $x_1(t) = e^{-i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t$
 $x_2(t) = e^{+i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t$

sol. generale è

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$$

elimino le due cost. arbit.
ma ora complesse

$$= A_1 \cos \omega_0 t - i A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + i A_2 \sin \omega_0 t$$

$$= (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + i(A_2 - A_1) \sin \omega_0 t$$

ma voglio $x(t)$ reale

$$\begin{cases} \text{Im}(A_1 + A_2) = 0 \\ \text{Re}(A_2 - A_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = a + ib \\ A_2 = a - ib \end{cases}$$

$$x(t) = 2a \cos \omega_0 t + 2b \sin \omega_0 t$$

non ho imparato nulla, ho solo sviluppato
un po' di formalismo che utilizzerò poi

Ora studio effetto di

OAS (8)

forza di attrito viscoso $F_r = -\gamma \dot{x}$

$$F_r = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

Riscrivo eq. della dinamica

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

è ancora lineare e omogenea

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{\gamma}{m}$$

provo il "trucco" appena visto di sol. compl.

$$x(t) = e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \gamma \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0 \quad \forall t$$

eq. caratteristica

$$\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Si distinguono 3 casi

1. $\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 < 0 \rightarrow$ oscill. sottosmorz.

2. $\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 > 0 \rightarrow$ oscill. sovrasmorz.

3. $\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2 = 0 \rightarrow$ oscill. criticamente smorzata

Caso 1.

CAS (9)

è il più interessante per la fisica
(e corrisponde anche al pendolo visco)

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega' \quad \omega'^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} < \omega_0^2$$

(ingenu
~ ω_0^2)

$$x_1(t) = e^{-\gamma/2 t} \cdot e^{i\omega' t}$$

$$x_2(t) = e^{-\gamma/2 t} \cdot e^{-i\omega' t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma/2 t} \left(A_2 e^{i\omega' t} + A_1 e^{-i\omega' t} \right)$$

su q.s. riprendo discorso di p. (7)
voglio $x(t)$ reale ecc...

Quindi soluzione generale è

$$x(t) = e^{-\gamma/2 t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t)$$

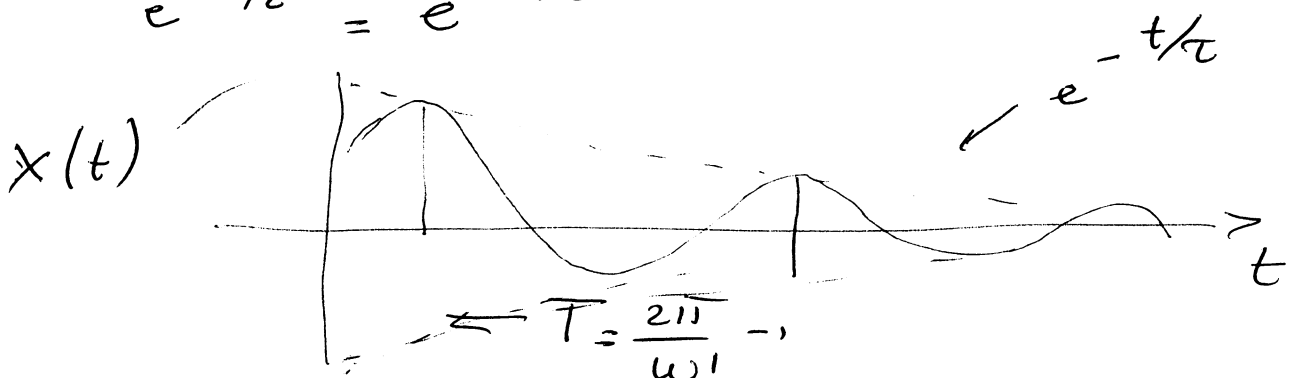
$$= A e^{-\gamma/2 t} \sin(\omega' t + \varphi)$$

- $A \sin(\omega' t + \varphi)$ è la solita sinusoidale
con A e φ det. da condizioni iniziali
e $\omega' =$ ~~meno~~ al posto di ω_0

- $e^{-\frac{\gamma}{2} t}$ è esponenziale decrescente

posso porre $\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\tau}$ $[\gamma] = T^{-1}$

$$e^{-\gamma/2 t} = e^{-t/\tau}$$



case 2 sottosm

~~caso 2~~ OAS

(10)

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$= -\frac{\gamma}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{\gamma^2}} \right) = \begin{cases} -\frac{\gamma_1}{2} \\ -\frac{\gamma_2}{2} \end{cases}$$

per $\frac{\gamma^2}{4} \sim \omega_0^2$ ho $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma$
con $\gamma_1 < \gamma_2$

e definendo $\tau_1 = \frac{2}{\gamma_1}$ $\tau_2 = \frac{2}{\gamma_2}$ $\tau_1 > \tau_2$

$$x(t) = a_1 e^{-t/\tau_1} + a_2 e^{-t/\tau_2}$$

all' aumentare di γ : γ_1 ~~diminuisce~~ diminuisce
 γ_2 aumenta

τ_1 aumenta

τ_2 diminuisce

quindi ho somma di due esponenziali,
per tempi suff. lunghi

$a_1 e^{-t/\tau_1}$ domina

e τ_1 aumenta all' aumentare
di γ

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma^2}{4}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\gamma}{2}$$

analisi II mi dice che ho sol.

$$e^{-\gamma/2 t}, t e^{-\gamma/2 t} \quad (\text{provarci a sostituire})$$

$$X(t) = A e^{-\gamma/2 t} (1 + B t)$$

$$\tau = \frac{2}{\gamma}$$

qui ~~è~~ $\gamma_1 < \gamma < \gamma_c$

quindi $\tau_1 > \tau > \tau_2$

- la sol. decresce esp. con costante di tempo $\tau = \frac{2}{\gamma}$
- è quella che decresce più velocemente tra quelle viste, tenuto conto che $\gamma_{\text{soltesm}} < \gamma_{\text{critico}}$