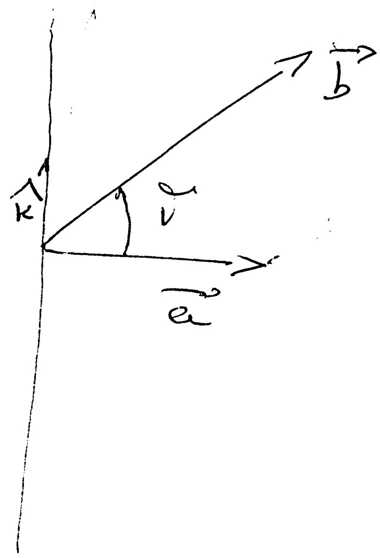
prodotto vettoriale

$\vec{a}$, $\vec{b}$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ individuano un piano



$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{c}$ è diretto lungo la normale al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$\vec{c} = a\, b \operatorname{sen}\vartheta \; \hat{k}$

il verso di $\hat{k}$ (di $\vec{c}$) è il verso di avanzamento di vite destra che ruota secondo la rot. $\vartheta < \pi$ che porta $\vec{a}$ a sovrapporsi a $\vec{b}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $\Rightarrow$ terna destra (non orolog.)

o anche rot. ϑ di $\vec{a}$ per sovrapporsi a $\vec{b}$ è antioraria quando vista da estremità di $\vec{c}$

$|\vec{c}| = a\, b \operatorname{sen}\vartheta$ = area parallelogramma lati a, b

<u>nota</u> $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c}$

il prodotto vettoriale <u>anticommuta</u>

29/10/12 (2)

rispetto a terna cartesiana ortogonale (ma la def. è indip. da rif.)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\begin{cases} a_x b_y - b_x a_y = c_z \\ a_y b_z - b_y a_z = c_x \\ a_z b_x - b_z a_x = c_y \end{cases} \qquad (1)$$

~~ma la de~~

discende da

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

n.b. se itero $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \underset{\text{in gen}}{\neq} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}_x \times \hat{u}_y = \hat{u}_z \\ \hat{u}_y \times \hat{u}_z = \hat{u}_x \\ u_z \times \hat{u}_x = \hat{u}_y \end{array}\right\} \text{versori di terna cartesiana}$$

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_x = 0$$

coerenza di notazione

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$

da queste con un po' di algebra ottengo le (1)

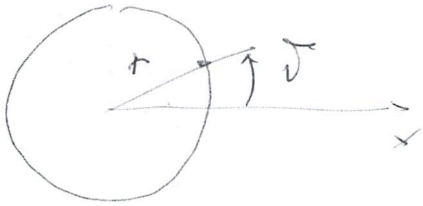
$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

ecc.

29/10/11 ③

definizione di velocità angolare vettoriale

Visto per moto ~~circolare uniforme~~ circolare



$$v = r\frac{d\vartheta}{dt} = \omega r$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{velocità angolare}$$

più ~~in~~ in generale si era visto per la derivata del vettore posizione, intrinseca a questo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\hat{u}_{\parallel}\right) = \hat{u}_{\parallel}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\vartheta}{dt}u_{\perp}$$

che avevamo anche trascritto in coordinate polari 2d (~~sono~~ corrispondono alla notaz. intrinseca $\vec{r}$)

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta$$

in 2-d

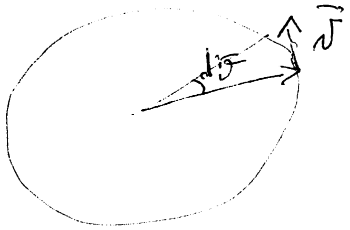
ancora $\frac{d\vartheta}{dt}$ è vel. angolare

la componente $r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta$ è componente di $\vec{v} \perp \vec{r}$

<u>notare che</u> qs. $\frac{d\vartheta}{dt}$ non è vel. angolare a meno che O sia centro di circonf. osculatrice

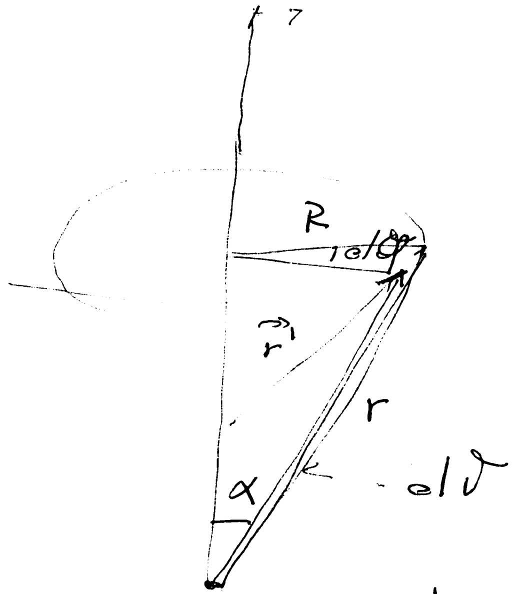
ora considero moto circolare

$$\frac{dr}{dt} = 0 \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\perp$$



(a)

ma anche



(b)

ho $v = R\frac{d\varphi}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt} = r'\frac{d\vartheta'}{dt}$

$$R = r \operatorname{sen}\alpha \qquad d\vartheta = d\varphi \operatorname{sen}\alpha$$

Considero (b) che è la rappres. più gen di moto circolare: vettore $\vec{r}$ ruota attorno ad asse,

$\Rightarrow$ velocità istantanea $\perp \vec{r}$ ma anche $\perp$ ad asse z (per def. $\perp$ a circonf. del moto)

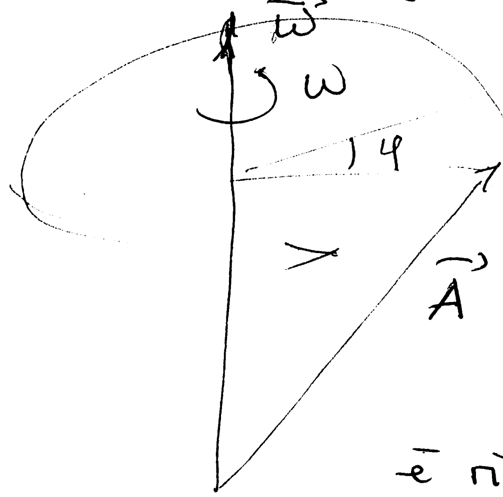
allora posso definire vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ da

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

definizione di velocità angolare in moto circolare

è indip. da dove scelgo O su asse Z

con la definizione data di $\vec{\omega}$
il risultato $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ si estende
immediatamente a vettore che precede
attorno ad asse fisso $\vec{\omega}$



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

è risultato che useremo
più avanti (moti giroscopici)

- Principi della dinamica
  valgono per sistemi inerziali

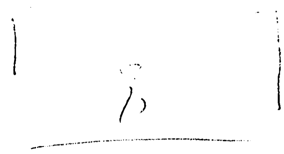
- abbiamo lasciato nel vago lo spazio in cui abbiamo derivato vettori in rif. intrinseco

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ intrinseco $\vec{r}$ supponiamo oss. inerziale

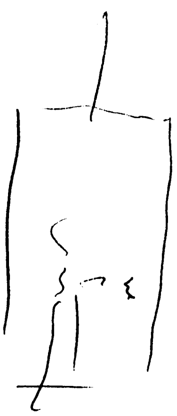
$\frac{d\vec{v}}{dt}$ intrinseco $\vec{v}$ istantaneam. corrisponde a oss. in moto con $\vec{v}$ risp. al preced.
→ inerziale se il preced. è inerziale

Talvolta "è comodo" = "calcoli più semplici" descrivere fenomeni risp. a oss. non inerziale

e.g.

- 

  il tram frena (= accelera) e io "subisco accel. rispetto al tram"

- 

  si trancia il cavo dell' ascensore e rispetto ascensore le chiavi "non cadono"

- Dovrei descrivere entrambi i fenomeni risp. a oss. iner. e poi passare a rif. in moto acc. con trasf. di sist. rif.
  semplice nei casi visti sopra

- ma se voglio tirar cannonate al mio vicino voglio lavorare con coord. terrestri e tener conto che sistema è non inerziale e acc. centripeta dip. da latitudine, ~~e sis~~ diversa tra me e mio vicino, e devo essere più veloce del vicino a fare i conti.

- Altro esempio:

~~sono al centro di~~ su una giostra in movimento cammino con vel. costante (nel rif. di giostra) in direzione radiale quale $\vec{F}$ agisce su di me?

Sicuramente F_r centripeta e prop. a r, ma anche forza tangenziale perchè $v_\vartheta = \omega r$ ~~e F_t~~

Voglio calcolarmi tutto questo nel rif. del tram, ascensore, giostra (o anche di giostra sul tram)

Cerco accelerazione $\vec{a}_{n.i.}$ rispetto a sistema ~~in att~~ ~~esterno~~ n.i. dato e poi ~~definisco~~ ~~F_{app}~~

Scrivo $\vec{F}_{n.i} = m\,\vec{a}_{n.i} \Rightarrow \vec{F}_{app} = \vec{F}_{n.i.} - \vec{F}$

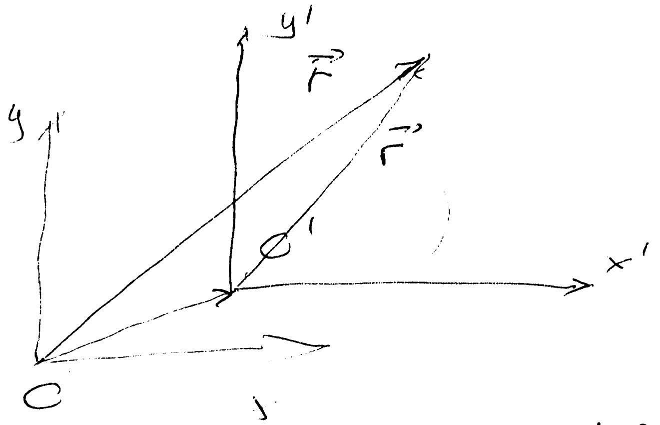
alla fine posso lavorare nel sistema n.i.

~~come~~ "quasi" come in sist. in. ~~som~~ sommando a $\vec{F}$ $\vec{F}_{app}$. Ma $\vec{F}_{app}$ non soddisfa 3° principio

v. Mazzoldi p. 84 3.6

Considero in 2-d

O' con rif. solidale, in moto qualunque risp. O inerziale



$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$ $\qquad$ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{u} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$

Ora studio, nel rif. cartesiano di O', cosa succede alle coordinate del punto

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}'\right) = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' \leftarrow \vec{v}'$$

$$+ x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt}$$

$$= \vec{v}' + x'\frac{d\vartheta}{dt}\hat{j}' - y'\frac{d\vartheta}{dt}\hat{i}'$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

n.b. $\vec{\omega}$ dir. lungo z è la vel. ang. ~~del~~ del rif. di O' risp. O inerz.

e $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{O'}$

quindi $\boxed{\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$

itero

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

mi limito a considerare $\vec{\omega} = \text{cost}.$

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}'$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{j}' + \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{j}'}{dt}$$

$$= \vec{a}' + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{j}' - \frac{dy'}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{i}'$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'}_{=0} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$= \vec{\omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - 2\omega \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)}$$

O è inerziale, quindi $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

$\vec{F}$ è la risultante delle forze "newtoniane"

Se O' vuole scrivere $\left(\sum_i \vec{F}_i\right)_{O'} = m\,\vec{a}\,'$

$$\left(\sum \vec{F}_i\right)_{O'} = m\vec{a} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' - m\vec{a}_{O'}$$

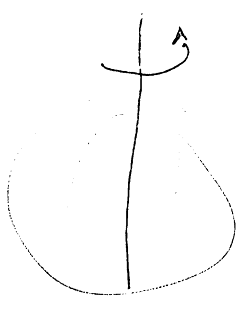
$$= \vec{F} + \vec{F}_{a_2} + \vec{F}_{a_3} + \vec{F}_{a_1}$$

1. $\vec{F}_{a_1} = -m\,\vec{a}_{O'}$ accelerazione ~~di oggetto~~ ~~ris~~ → forza su oggetto rispetto a tram che frena

2. $\vec{F}_{a_2} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ → forza "centrifuga" mi spinge contro parete è $= -m\,a_{centrip.}$

3. $\vec{F}_{a_3} = -2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$: forza Coriolis è quella che devo contrastare per muovermi radialmente su giostra

- è la forza che genera movimenti ciclonici per masse d'aria in moto nell'atmosfera



"devia" verso destra traiettorie nell'emisfero Nord

Lavoro

viste per $\vec{F}$ di cui è nota dip da t $\vec{F}(t)$ il teorema dell'impulso $\Delta\vec{p} = \int_{t_{in}}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$

Ora cerco forma $\int$ di leggi Newton quando sia nota $\vec{F}(\vec{r})$, o in 1-dim $F_x(x)$

potrei per es. chiedermi

1-d
$$\int_{x_{in}}^{x_f} F_x(x)\,dx = ?$$

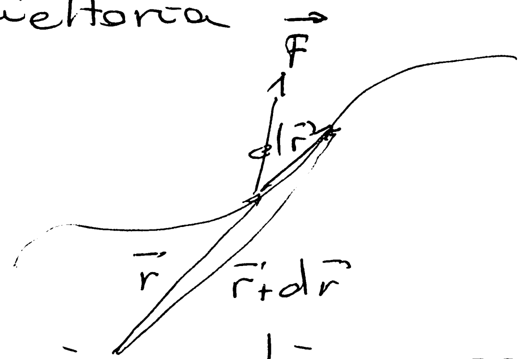
ma osservo subito che $\vec{F}$ e $\vec{r}$ sono vettori, allora 2-d (si generalizza subito a 3-d)

$$\int_{\vec{r}_{in}}^{\vec{r}_{fin}} F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy = ?$$

Vediamo per gradi

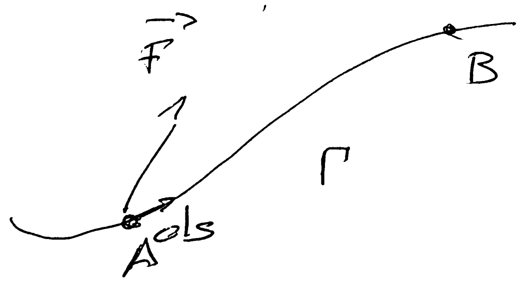
$$F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

traiettoria



chissà perché spostam. infinites.

lungo traiettoria si preferisce chiamare $d\vec{s}$ 30/10/12 ②



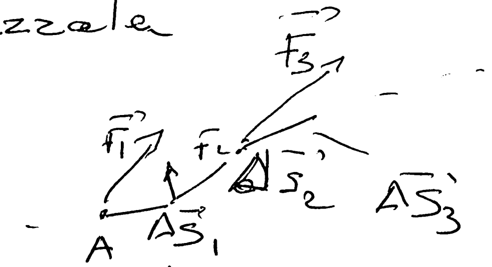
mi sto chiedendo se imparo qualcosa da

$$\int_{A\,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

devo specif. punto iniziale A
punto finale B
traiettoria Γ

è "integrale di linea", che non sa risolvere neppure chi, tra gli studenti, sa già fare $\int$

Però se approssimo linea con spezzata



so calcolare $\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$

e $W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i)$

definisco Lavoro infinitesimo

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

e lavoro della forza $\vec{F}(x,y)$ lungo spezzata

$$W = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i$$

per la spezzata che approx sempre meglio la traiettoria $\Delta\vec{s}_i \to d\vec{s}(\vec{r})$

$d\vec{s}$

e $$\boxed{W = \int_{\substack{A \\ (\Gamma)}}^{B} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{s}}$$ def. di lavoro di $\vec{F}(x,y)$

Fin qui la def., ma ancora non ho imparato nulla (se non che non so fare l'$\int$)

Vediamo di 'manipolare' $\vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s}$$ (è infinitesimo)

$$= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

(porcheria) $= m \, d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = m \, d\vec{v} \cdot \vec{v}$

ma $d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m \, d(v^2)$$

~~E~~ e quindi

$$W_{AB} = \int_{A\,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A\,\Gamma}^{B} \frac{1}{2} m \, d(v^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right)$$

Definisco $\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v^2}$ energia cinetica

Quindi

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$$

$$\boxed{W_{AB} = E_K(B) - E_K(A)}$$

teorema dell'energia cinetica:

Teor la variazione dell'energia cinetica di una part. che va da A a B lungo Γ è uguale al lavoro lungo Γ da A a B della risultante delle forze agenti su part.

sì: $\vec{F}(x,y) = \sum_i \vec{F}_i(x,y)$

È immediato:

$W_{AB} = \sum_i W_{AB_i}$: lavoro di risultante è Σ di lavori delle singole forze

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

il lavoro è <u>scalare</u> (invar. per rotaz.)

Il lavoro W dip. in generale da sist. di rif., anche se mi limito a sistemi inerziali

$O \longrightarrow O'$ inerziali

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}' \\ d\vec{s} \neq d\vec{s}' \end{cases} \qquad (d\vec{s} = d\vec{s}' + \vec{u}\, dt)$$

$$\Rightarrow \delta W' = \vec{F} \cdot d\vec{s}' \neq \vec{F} \cdot d\vec{s} = \delta W$$

$$W'_{AB} \neq W_{AB}$$

ma resta vero

$$\begin{cases} W'_{AB} = E'_K(B) - E'_K(A) \\ W_{AB} = E_K(B) - E_K(A) \end{cases}$$

$$\Delta E'_K \neq \Delta E_K$$

E_K e ΔE_K dip. in generale da sist. rif.

Teorema en. cinet. $W_{AB} = \Delta E_K$ vale per tutti sistemi inerziali

Potenza

$$P = \frac{\delta W}{dt} \quad \text{definizione}$$

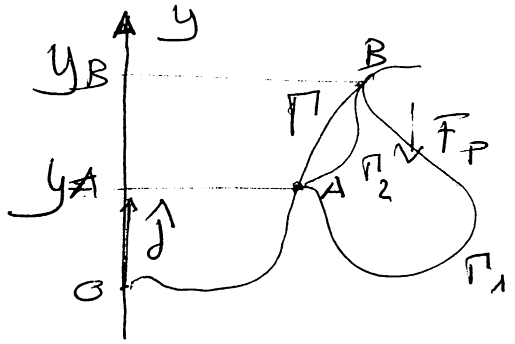
da cui

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

vediamo esempi

1. <u>lavoro di $\vec{F}_p$</u>

$$\vec{F}_p = -mg\,\hat{j}$$



$$\vec{F}_p \cdot d\vec{s} = -mg\,dy$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{s} = \int_A^B -mg\,dy = \int_{y_A}^{y_B} -mg\,dy$$

$$= -mg\,(y_B - y_A) = mg\,(y_A - y_B)$$

$$= \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

o anche

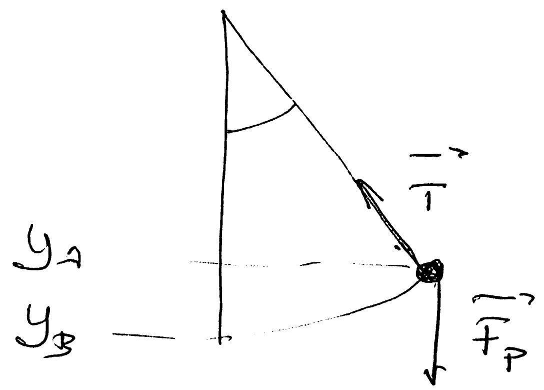
$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg\,(y_A - y_B)$$

Il teorema dell'energia cinetica mi ha permesso di risparmiare qualche conto

<u>n.b.</u> in questo caso, $\vec{F}_p$, il risultato non dip dal perc. Γ che scelgo per andare da A a B, ~~Pass~~ ma solo da A e B (anzi: solo da y_A e y_B)

$$W_{AB} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -(mg y_B - mg y_A)$$

2. lavoro della risultante delle $\vec{F}$ agenti su pendolo



$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F}_p \cdot d\vec{s} + \vec{T} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{ma } \vec{T} \perp d\vec{s} \Rightarrow \vec{T} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$W = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{s} = -(mg\,y_B - mg\,y_A)$$
$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$\Rightarrow$ la variazione di E_K del pendolo è la stessa di quella di un ~~sasso~~ che si muove vert. da y_A a y_B, ma non è la stessa la variazione del vettore velocità: anche $\vec{F}$ che non compiono lavoro contribuiscono a $\Delta\vec{p}$

Lavoro di $\vec{F}_{el}$

$$\vec{F}_{el} = -Kx\hat{i}$$

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s} = -Kx\,dx$$

$$W_{AB} = \int_A^B -Kx\,dx = -\int_{x_A}^{x_B} Kx\,dx = -\left(\frac{1}{2}Kx_B^2 - \frac{1}{2}Kx_A^2\right)$$

Anche qui ho ris. che dip. solo da posiz. iniziale e finale (n.b. è necessario se moto è in una sola dim e $\vec{F}$ dip solo da pos (x))

ma generalizzo subito a 2-dim polari

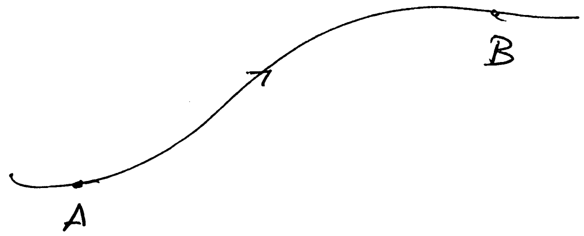
$$\vec{F}_{el} = -\cancel{\quad}\,Kr\,\hat{u}_r$$

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s} = -Kr\,dr$$

$$W_{AB} = -\left(\frac{1}{2}Kr_B^2 - \frac{1}{2}Kr_A^2\right)$$

quindi anche el. 2-d ~~di~~ W_{AB} dipende solo da A e B (anzi: r_A e r_B) non da traiettoria

Lavoro di forza attrito radente



n.b. $\vec{v}$ in ogni punto è tang a traiettoria

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \vec{v} \parallel d\vec{s}$$

$$\hat{u}_v \parallel ds$$

$$\vec{F}_a = -\mu_d N \hat{u}_v$$

$$W_{AB} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \int_{A,\Gamma}^{B} \hat{u}_v \cdot d\vec{s}$$

$$= -\mu_d N \int_{A,\Gamma}^{B} ds = -\mu_d N (s_B - s_A)$$

s è coord. lungo traiett.
$s_B - s_A$ è lungh traiett. Γ
da A a B

$\Rightarrow W_{AB}$ dipende da Γ