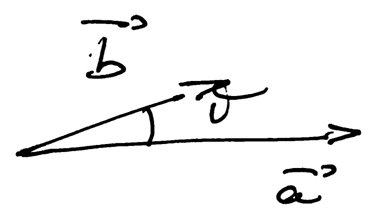
Operazioni su vettori

• Prodotto scalare (decidere dove collocare) introdurre anche se non serve

a • def. intrinseca

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} \overset{def}{=} a \cdot b \cos \vartheta$$



b • in termini di componenti cartesiane la (a) diventa

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\text{con } \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$b = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

Si dimostra che la (a) e la (b) sono equivalenti in maniera semplice con matrici. Infatti la (b) è

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \text{in rif } \hat{i}, \hat{j}$$

la (a) è lo stesso prodotto in rif. ~~rete~~ $(\hat{i}', \hat{j}')$ ruotato in modo che $\hat{i}' = \hat{u}_a$

È immediato mostrare che prod. così definito è invariante per rotazioni

derivata di un vettore

- Si applicano tutte le solite regole di derivazione

$$\frac{d\vec{a}}{dt} =$$

- Componenti cartesiane

$$\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\hat{\imath} + a_x \frac{d\hat{\imath}}{dt} + \frac{da_y}{dt}\hat{\jmath} + a_y \frac{d\hat{\jmath}}{dt}$$

ma $\frac{d\hat{\imath}}{dt} = 0 = \frac{d\hat{\jmath}}{dt}$ (~~ognuno~~ ~~e~~ tutto è riferito al riferimento)

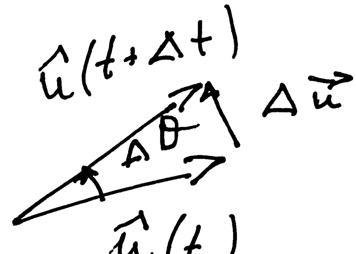
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{da_y}{dt}\hat{\jmath}$$

- ~~Dee~~ Rappresentazione intrinseca

$$\vec{a} = a\,\hat{u}_a$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\hat{u}_a + a\frac{d\hat{u}_a}{dt}$$

$\hat{u}_a$ ora varia la sua orientazione nello spazio



$$\underbrace{\hat{u}(t+\Delta t) = \hat{u}(t)}_{\text{entrambi unitari}} + \Delta\vec{u}$$

$$\Delta\vec{u} = \hat{u}_\perp \Delta\theta$$

n.b. $\hat{u}_\perp \cdot \hat{u} = 0$ $\qquad \hat{u} \equiv \hat{u}_\parallel$

da cui

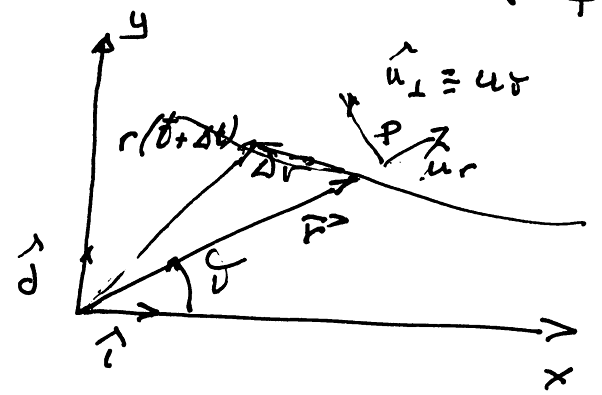
$$\frac{d\,\hat{u}_a}{dt} = \frac{d\,\hat{u}_{\parallel}}{dt} = u_{\perp}\frac{d\vartheta}{dt}$$

<u>nota importante</u> assumo $\Delta\vartheta > 0$ per rotazione antioraria <u>convenzione</u>

quindi

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \hat{u}_{\parallel}\frac{d\vec{a}}{dt} + \hat{u}_{\perp}\frac{d\vartheta}{dt}$$

Cinematica nel piano



in coord. cart. $\quad \vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} = x \hat{i} + y j$

intr. $\quad \vec{r} = r \hat{u}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

cart.

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

$$= v_x \hat{i} + v_y j \qquad \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

intrinseco ($\vec{r}$)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{u}_r \frac{dr}{dt} + r \hat{u}_\perp \frac{d\vartheta}{dt}$$

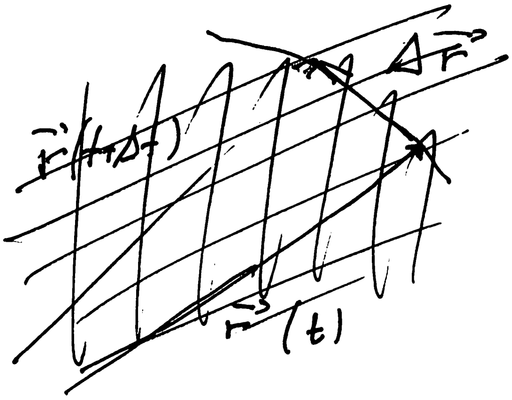
corrisponde anche a $\vec{v}$ in coord polari

$\vec{u}_\perp \equiv u_\vartheta$

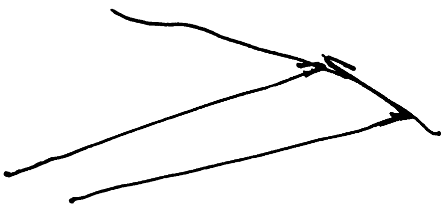
pol

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\vartheta}{dt} u_\vartheta$$

componente radiale — componente tangenziale



per $\Delta t \to 0$
$\Delta \vec r$ tende a 0 e
coincide con il segmento
di traiettoria
$d\vec r$ è localmente tang.
a traiettoria



intrinseco(r) $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat u_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat u_\vartheta$ $\perp$

delta s coordinata lungo traiettoria
posso scrivere

$$\vec v = \frac{ds}{dt}\hat u_T \quad (\text{che } \underline{\text{non}} \text{ è } u_\perp)$$

intrinseco(v) $\quad = v\,\hat u_T \quad$ (è la notaz. intrinseca a $\vec v$: $\hat u_T = \hat u_v$

Es. moto circolare uniforme:

$$r = \text{cost.}$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega \qquad (\vartheta = \omega t + \varphi)$$

è molto semplice in coord. polari

$$\vec v = 0\,\hat u_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat u_\vartheta = \omega r\,\hat u_\vartheta = v\,\hat u_T$$

$$v = \omega r$$

in coord. cartesiane ho

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta = r\cos(\omega t+\varphi) \\ y = r\,\text{sen}\,\vartheta = r\,\text{sen}(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$v_x = -\omega r\,\text{sen}(\omega t+\varphi)$$
$$v_y = +\omega r\cos(\omega t+\varphi)$$

accelerazione

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- cartesiana

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

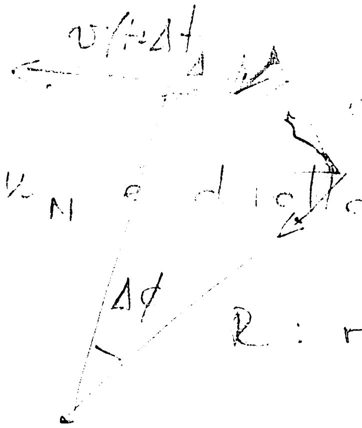
- intrinseca (v)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \underset{\hat{u}_v}{\hat{u}_T} + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

indico con ϕ l'angolo di $\vec{v}$ nel rif.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt} u_N$$

tang. a traiett. $\qquad\qquad$ $\perp$ a traiett.



n.b. u_N è diretto verso interno di traiett.

R : raggio di curvatura locale

$\Delta S = R\,\Delta\phi$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R} u_N$$

n.b. $\hat{u}_T$ e $\hat{u}_N$ sono vers. $\parallel \vec{v}$ e suo $\perp$ (antiorario,
~~oppure int. a traiettoria~~)
u_N è ottenuto ruotando u_T di $\frac{\pi}{2}$ nel verso di ϕ

Il termine v (>0 è in modulo) $\frac{d\phi}{dt} u_N$
è interno a traiett.
allora $R < 0$ oppure cambio $\hat{u}_N$

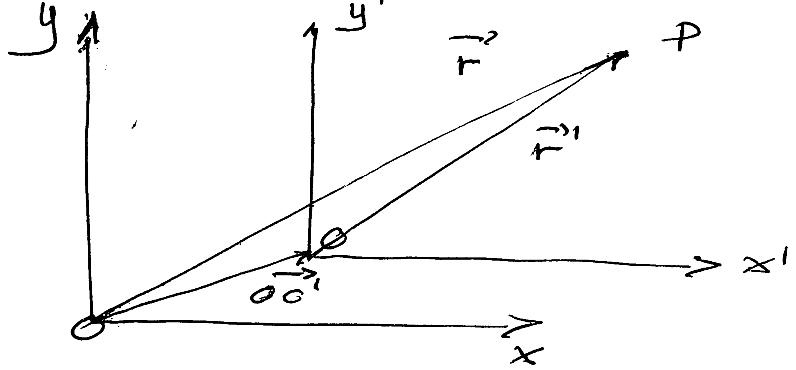
9/10/12

- lascio def. di prodotto vettore alla 1ª volta che occorrerà (Coriolis) (anche $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ecc ...)

Trasf. di coordinate:

visto: rotazione $\begin{cases} x' = x\cos\vartheta + y \sin\vartheta \\ y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \end{cases}$

traslazione è molto semplice



$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{OO'}$ (vale per le 3 componenti)

$x = x' + x_{O'} \rightarrow \begin{cases} x' = x - x_{O'} \\ y' = y - y_{O'} \\ z' = z - z_{O'} \end{cases}$

— O' in moto risp. O con vel. $\vec{u}$ costante $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$

- senza perdere gen $\hat{i} \parallel \hat{i}' \parallel \vec{u}$

ponge $t = t'$ (~~~~ soprattutto $\Delta t = \Delta t'$)

e $O' \equiv O$ per $t = 0$

allora $(\vec{OO'}) = \vec{u}\, t$

Quindi ho <u>trasformazioni di Galileo</u>

tra due oss. in reciproco moto rettilineo unif

1) $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{OO'} = \vec{r}\,' + \vec{u}\,t$

(n.b. $\vec{u}$ è la vel. di O' risp. O)

2) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{u} = \vec{v}\,' + \vec{u}$ velocità si sommano vett.

3) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}\,'}{dt} = \vec{a}\,'$ le acc. sono identiche nei due sistemi

N.B. ho scritto $\vec{v}\,' = \dfrac{d\vec{r}\,'}{dt}$ ecc., non $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt'}$

perché <u>ipotesi forte</u> $dt' = dt$

(a Galileo pareva ovvia)

<u>tempo assoluto</u>

Dinamica

9/10/12 ③

1) Legge (principio) di inerzia (Galileo)

un corpo non soggetto a forze mantiene il suo stato di moto = non subisce cambiamenti di $\vec{v}$

forze : ~~int~~ conseguenza di interazioni con altri corpi

$\Rightarrow$ corpo (meglio part.) non sogg. a interazioni con altri corpi non subisce cambiamenti di $\vec{v}$

ma trasf. di Galileo mi dice

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

perché $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$ deve essere $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$

$\Rightarrow$ principio di inerzia vale solo per classe di sistemi di rif. in reciproco moto rett. uniforme

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{sistemi inerziali}}$

sono quelli in cui vale princ. inerzia

princ. inerzia $\longrightarrow$ definisce sistemi inerziali

non individuo "moto assoluto"

2) 9/10/12 ④

la variazione dello 'stato di moto' di una particella ~~e~~ (nei sistemi inerziali) è data dalla legge

$\vec{F} = m\vec{a}$

→ l'acc. di una data part. (m def.) in interazione con altri corpi che complessivam. esercitano 'forza' $\vec{F}$ è invers. prop. a m e // a $\vec{F}$

$\vec{F}$ è il risultato, strettamente la somma vettoriale, degli effetti delle interazioni con altri corpi ~~E~~ $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

e poiché m è sempre la stessa
$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$ (princ. sovrapp.)

massa, richiesta definizione, è costante caratteristica di part.

posso scrivere $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

non è neppure la def. di $\vec{F}$, non servirebbe a nulla ...
piuttosto: se $\vec{a}$ allora $\vec{F}$ e devo spiegarla (trovarne cause)
⟹ FISICA

$\vec{F}$ è prop. delle interaz. di part. con resto del mondo, non dip. da oss. (ipotesi fisica non dip. da oss.)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$$

equazioni mecc. invarianti per trasf. Galileo $\Rightarrow$ $\boxed{\text{no oss. privileg.}}$

- Come definisco $\vec{F}$ ed m

  - massa campione
  - $\vec{F}$ esercitata da interazione con altro corpo "tramite molla" lungh. l
    - : da molla allungata a l

def. massa

$\vec{F} = m_0 \vec{a}_0$ dico che esercita $\vec{F}$ numericamente pari ad $\vec{a}_0$ (poi dovrò capire perché)

m_0: 1 Kg

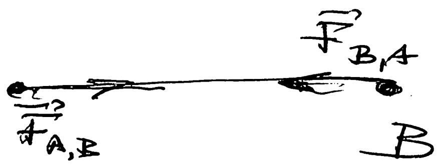
stessa $\vec{F}$:

$$\vec{F} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

3° principio azione - reazione

$$\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$$

agisce lungo congiungente di A con B (formulazione forte)



- dimensioni e unità di misura