Relatività

Carlo Oleari

19/7/2021

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Si consideri il decadimento del para-positronio (massa m) in due fotoni, nel sistema del laboratorio, dove il positronio ha momento relativistico $\bar{\mathbf{p}}$. Calcolare l'angolo δ tra i due fotoni nel sistema del laboratorio, in funzione dell'angolo φ che un fotone forma con la direzione del moto del laboratorio, nel sistema di riferimento del centro di massa.

Problema 2

In un sistema di riferimento inerziale è presente un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}} = (0, 0, E)$ uniforme e costante. Sia data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trova nel punto $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = (0, y_0, z_0)$, con momento relativistico $\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0} = (0, p_{0y}, p_{0z})$.

I) Risolvere le equazioni del moto relativistiche e ricavare la legge oraria, ovvero $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

II) Usando i risultati del punto I), derivare il limite Newtoniano della legge oraria. Commentare i risultati ottenuti.

III) Usando i risultati del punto I), calcolare la legge oraria a grandi t. Commentare i risultati ottenuti.

Problema 3

Si consideri la seguente densità Lagrangiana per un campo vettoriale ψ^μ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi^\nu \left(\partial_\mu \partial^\mu \psi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \psi_\mu\right) + k \left(\partial_\mu \psi^\mu\right)^2$$

dove k è un parametro reale.

1. Si ricavi dapprima, l'equazione di campo per una generica lagrangiana $\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi\right)$ che dipende da un campo, e dalle sue derivate prime e seconde.
2. Scrivere l'equazione del moto per il campo ψ^μ, senza fare alcuna manipolazione della densità Lagrangiana.
3. Ricordando che è l'azione, ovvero l'integrale della densità Lagrangiana, la vera quantità da estremare, riscrivere la densità data in modo tale che non compaiano le derivate seconde dei campi.

4. Utilizzando la densità ricavata al punto precedente, derivare nuovamente le equazioni del moto.

Problema 4

Mostrare che nel processo di collisione di due particelle in due particelle, dove la conservazione dei quadrimomenti è ovviamente data da

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \,,$$

con $p_i^2 = m_i^2$, $i = 1 \dots 4$, vale la relazione

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2$$

dove $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ e $u = (p_1 - p_4)^2$.