Relatività

Carlo Oleari

2/11/2020

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$, si abbia un fotone con componenti spaziali solo lungo l'asse delle z, ovvero il suo quadrimomento sia $p = E(1, 0, 0, 1)$. Esiste una classe speciale di trasformazioni di Lorentz, chiamata "piccolo gruppo di p", che lascia le componenti di p invariate. Per esempio, una qualunque rotazione attorno all'asse z appartiene a questa classe.

a) Calcolare una sequenza di boost e rotazioni il cui prodotto appartenga al piccolo gruppo di p, ma che **non** sia una semplice rotazione attorno all'asse delle z. Per ricavare ciò si seguano i seguenti suggerimenti.

  I) Applicare un generico boost nel piano x-y (sfruttare l'arbitrarietà nel decidere l'allineamento degli assi x e y).

  II) Fare una opportuna rotazione che riallinei il momento del fotone lungo l'asse delle z.

  III) Determinare un nuovo boost che riporti il fotone ad avere le componenti iniziali.

b) Scrivere esplicitamente la trasformazione di Lorentz trovata e verificare che **non** si tratta di una pura rotazione.

Problema 2

Un modo per produrre antiprotoni ($\bar{p}$) è quello di fare scontrare due fasci di protoni (p) con sufficiente energia da dare origine a questa reazione:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

I) Calcolare l'energia minima che ognuno dei due protoni incidenti deve avere per far avvenire tale reazione nel sistema del centro di massa. Giustificare la risposta.

II) Calcolare l'energia minima che deve avere il protone incidente nel sistema del laboratorio, in cui il secondo protone può considerarsi fermo. Giustificare la risposta.

Esprimere i risultati in termini della massa m del protone.

Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale sia data una particella di massa m e carica q, con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0))$. Siano inoltre presenti un campo elettrico $\mathbf{E}$, parallelo all'asse delle y, e un campo magnetico $\mathbf{B}$, parallelo all'asse delle z, entrambi costanti, omogenei e tali che $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ in unità naturali.

Calcolare l'andamento del quadrimomento p^μ in funzione del tempo proprio τ e della velocità iniziale.

Problema 4

Derivare l'equazione di Eulero-Lagrange per un campo scalare ϕ avente densità Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi,\, \partial_\mu\phi,\, \partial_\mu\partial_\nu\phi,\, \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\phi)$, contenente quindi anche le derivate seconde e terze dei campi ϕ.