Relatività

Carlo Oleari

13/7/2020

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Si consideri un atomo eccitato, avente velocità v nel laboratorio. L'atomo nel suo stato fondamentale abbia massa a riposo m, e sia Δ la differenza di energia tra lo stato eccitato e lo stato fondamentale.

1. Calcolare l'energia $\mathcal{E}$ del fotone di diseccitazione emesso lungo la direzione del moto dell'atomo eccitato, in funzione di v, m e Δ.
2. Si consideri ora il processo inverso: un fotone di energia $\mathcal{E}$ che eccita un atomo nel suo stato fontamentale, fermo nel laboratorio. Ricavare il legame tra $\mathcal{E}$, m e Δ
3. Calcolare che velocità deve avere l'atomo eccitato del punto 1) affinché il fotone emesso ecciti un atomo identico, fermo e nello stato fondamentale.

Problema 2

In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ sono presenti un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}} = (0, 0, E)$, ed un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}} = (B, 0, 0)$, uniformi e costanti, con $B = 2E$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = (1, 1, 1)$, con velocità $\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{0} = (1/2, 0, 1/2)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

a) A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perché uno dei due campi è zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare posizione e momento iniziali della particella in tale sistema.
Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

b) In $\mathcal{S}'$, ricavare la legge oraria, ovvero la posizione in funzione del tempo (ovviamente con le coordinate spazio-temporali di $\mathcal{S}'$).

N.B. Ad ogni passaggio, dopo aver scritto le formule analitiche, avete la facoltà di sostituire i valori numerici dati, prima di proseguire al passaggio successivo, al fine di avere equazioni più compatte e semplici da maneggiare.

Problema 3

Si consideri la seguente Lagrangiana per un campo vettoriale B^μ di massa m

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 B^\mu B_\mu \, .$$

con

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

Scrivere l'equazione del moto per il campo B^μ.

Problema 4

Un'astronave è diretta verso la Terra con velocità costante v. Dall'astronave si vuole inviare a Terra un segnale elettromagnetico di preavviso che deve giungere con un anticipo T prefissato (in tempo terrestre) rispetto al momento di arrivo dell'astronave. Con quanto anticipo T' (tempo dell'astronave) rispetto al momento dell'atterraggio dovrà essere inviato il segnale?

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}' &= \gamma \left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}} \right) \bar{\boldsymbol{v}} \\ \bar{\mathbf{B}}' &= \gamma \left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right) \bar{\boldsymbol{v}} \end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{E}}'_\parallel = \bar{\mathbf{E}}_\parallel && \bar{\mathbf{B}}'_\parallel = \bar{\mathbf{B}}_\parallel \\ &\bar{\mathbf{E}}'_\perp = \gamma \left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}} \right)_\perp && \bar{\mathbf{B}}'_\perp = \gamma \left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}} \right)_\perp \end{aligned}$$