Relatività

Carlo Oleari

15/6/2020

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Si definisca una coordinata immaginaria $w = i\,t$. Dimostrare che una rotazione di un angolo θ puramente immaginario nel piano (w, x_i), con $i = 1, 2, 3$, corrisponde ad un boost di Lorentz nelle coordinate (t, x_i). Calcolare la relazione tra la velocità v del boost e l'angolo θ.

Problema 2

Sia data una particella relativistica non soggetta a forze. Si definisca il tensore

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

a) Dimostrare che tale tensore è conservato.

b) Dare l'interpretazione fisica dei **due** vettori conservati associati al tensore $L^{\mu\nu}$ e commentare, dal punto di vista fisico, il fatto che sono costanti.

Problema 3

Nel sistema del laboratorio, un protone di massa m ed energia $\mathcal{E}$ collide su di un neutrone che, in prima approssimazione, possiamo trattare come fermo e con massa uguale. A seguito di questa collisione, si produce uno stato finale in cui sono ancora presenti un protone ed un neutrone, ed in aggiunta si è creata una particella di massa M. Calcolare il valore massimo della massa M che può essere prodotta.

Problema 4

In un sistema di riferimento inerziale $\mathcal{S}$ sono presenti un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}} = (0, 0, E)$, ed un campo magnetico $\bar{\mathbf{B}} = (B, 0, 0)$, uniformi e costanti, con $E = 2B$. Sia inoltre data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = (1, 1, 1)$, con velocità $\bar{\mathbf{v}}_\mathbf{0} = (1/2, 1/2, 0)$. Si vuole studiare il moto di tale particella.

a) A tal fine, sappiamo che esiste un sistema di riferimento $\mathcal{S}'$ nel quale le equazioni relativistiche che descrivono il moto risultano semplificate, perché uno dei due campi è zero in tale sistema. Determinare tale sistema e calcolare posizione e momento iniziali della particella in tale sistema.
Attenzione al calcolo dell'istante iniziale in questo sistema.

b) In $\mathcal{S}'$, ricavare la velocità in funzione del tempo (ovviamente di $\mathcal{S}'$).

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\boldsymbol{v}} \\
\bar{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}\right)\bar{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{B}}_{\parallel}$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right)_{\perp} \qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right)_{\perp}$$