Relatività

Carlo Oleari

12/2/2020

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Si consideri l'urto elastico di una particella con velocità u contro un muro che si muove perpendicolarmente alla sua velocità v, in direzione opposta a u.

a) Calcolare la velocità finale della particella dopo l'urto.

b) Verificare che sia minore della velocità della luce.

Problema 2

In un sistema di riferimento inerziale, un protone di massa M e velocità v urta elasticamente un pione, di massa $m < M$, avente velocità trascurabile.

a) Calcolare l'angolo massimo di diffusione del protone, rispetto alla sua direzione iniziale. Dimostrare che sia effettivamente un massimo e verificare che i valori ottenuti siano accettabili.

b) In corrispondenza di tale angolo, calcolare la velocità finale del protone.

c) Ricavare l'espressione del termine dominante della velocità finale del punto b) nel limite ultra-relativistico

d) Ricavare l'espressione della velocità finale del punto b) nel limite non relativistico, fino all'ordine v^3 incluso.

Problema 3

Calcolare il campo magnetico $\bar{\mathbf{B}}$ generato da una corrente I in un filo rettilineo infinitamente lungo, conoscendo la forma del campo elettrico generato da una distribuzione rettilinea ed uniforme di cariche elettriche statiche, le leggi di trasformazione dei campi elettromagnetici per boost di Lorentz, e usando opportunamente il principio di sovrapposizione per campi elettromagnetici.

Problema 4

Calcolare il tensore $G_{\mu\nu}$, definito da

$$g_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu} = G_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}\ ,$$

a seguito della trasformazione non lineare di coordinate

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - x^2\, b^{\mu}}{1 - 2\, b \cdot x + b^2\, x^2}$$

con b^{μ} tetravettore costante.

Relazione tra campi elettrici e magnetici in diversi sistemi inerziali

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{E}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\boldsymbol{v}} \\
\bar{\mathbf{B}}' &= \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \bar{\mathbf{B}}\right)\bar{\boldsymbol{v}}
\end{aligned}$$

Scrivibili anche come

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} \qquad\qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\parallel} = \bar{\mathbf{B}}_{\parallel}$$

$$\bar{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{B}}\right)_{\perp} \qquad\qquad \bar{\mathbf{B}}'_{\perp} = \gamma\left(\bar{\mathbf{B}} - \bar{\boldsymbol{v}} \times \bar{\mathbf{E}}\right)_{\perp}$$