Elementi di fisica teorica

Carlo Oleari

21/1/2019

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

Mostrare che l'effetto complessivo di due trasformazioni di Lorentz successive effettuate in direzioni tra loro ortogonali, x e y, con velocità v_1 e v_2 rispettivamente, è equivalente a quello di una singola trasformazione di Lorentz seguita da una rotazione degli assi. Calcolare a tal fine i parametri di quest'ultima trasformazione di Lorentz e della rotazione in funzione dei parametri v_1 e v_2 delle trasformazioni iniziali.

Si ricorda che la generica trasformazione di Lorentz è data da

$$\begin{cases} t' = \gamma\,(t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}\left[(\gamma-1)\,\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma\, t\right] \end{cases}$$

Problema 2

Si consideri una distribuzione di materia nell'universo caratterizzata dalla seguente espressione per la quadricorrente

$$j^\mu = K\,\frac{x^\mu}{x^4}\,,$$

dove x^μ è il quadrivettore posizione e K è una costante invariante di Lorentz con le dimensioni di una massa, e si consideri tale distribuzione nelle regioni per cui $x^2 > 0$.

a) Dimostrare che, per tale distribuzione, la massa totale si conserva, consistentemente con la mancanza di interazioni della materia in considerazione.

b) Mostrare che la distribuzione è consistente con la legge di Hubble per la dipendenza della velocità dalla distanza $\mathbf{u} = H\,\mathbf{r}$, pur di scegliere per $t = 0$ l'istante del Big Bang e di porre $H = t^{-1}$.

c) Discutere come apparirà la distribuzione di massa in un sistema di riferimento inerziale solidale con uno qualunque degli elementi di materia in moto con la velocità definita dalle relazioni precedenti.

Problema 3

Ricordando che la velocità relativa tra due particelle massive è la velocità di una di esse nel sistema di riposo dell'altra:

a) Esprimere la velocità relativa di due particelle in termini dei loro invarianti relativistici.

b) Calcolare la massima velocità relativa tra due particelle di massa m_1 ed m_2, che siano state prodotte dal decadimento di una particella ferma di massa M in tre particelle di massa m_1, m_2 ed m_3, rispettivamente.

   Scrivere il risultato in modo tale che sia immediatamente evidente la simmetria per scambio $m_1 \leftrightarrow m_2$.

Problema 4

In un sistema di riferimento inerziale sia data una particella di massa m e carica q, con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), 0)$. Siano inoltre presenti un campo elettrico $\mathbf{E}$ e un campo magnetico $\mathbf{B}$ costanti, omogenei e paralleli all'asse z.

a) Si calcoli l'andamento del quadrimomento p^μ in funzione del tempo t.

b) Dal risultato precedente, si derivi la dipendenza delle tre componenti della velocità $\mathbf{v}$ dal tempo t.