

Elementi di fisica teorica

Carlo Oleari

17/09/2018

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportarli solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Problema 1

In un sistema di riferimento inerziale \mathcal{S} , si abbia un fotone con componenti spaziali solo lungo l'asse delle x , ovvero il suo quadrimomento sia $p = E(1, 1, 0, 0)$. Esiste una classe speciale di trasformazioni di Lorentz, chiamata "piccolo gruppo di p ", che lascia le componenti di p invariate. Per esempio, una qualunque rotazione attorno all'asse x appartiene a questa classe.

- a) Calcolare una sequenza di boost e rotazioni il cui prodotto appartenga al piccolo gruppo di p , ma che **non** sia una semplice rotazione attorno all'asse delle x . Per ricavare ciò si seguano i seguenti suggerimenti.
 - I) Applicare un generico boost nel piano y - z (sfruttare l'arbitrarietà nel decidere l'allineamento degli assi y e z).
 - II) Fare una opportuna rotazione che riallinei il momento del fotone lungo l'asse delle ascisse.
 - III) Determinare un nuovo boost che riporti il fotone ad avere le componenti iniziali.
- b) Scrivere esplicitamente la trasformazione di Lorentz trovata e verificare che **non** si tratta di una pura rotazione.

Problema 2

Si consideri il processo a tre particelle $a \rightarrow b+c$, con masse m_a , m_b ed m_c , rispettivamente, nel sistema del laboratorio.

- a) Calcolare l'energia della particella b nel caso in cui a sia in quiete nel sistema del laboratorio.
- b) Un atomo di massa m , a riposo nel sistema del laboratorio, decade ad uno stato di massa $(m - \delta)$ emettendo un fotone di frequenza ν .
 - I) Ricavare la relazione tra l'energia del fotone e δ .
 - II) L'energia del fotone è maggiore o minore di δ ? Cosa implica ciò nell'emissione e successivo assorbimento di un fotone da parte di atomi simili?

- c) Se a decade mentre è in movimento nel sistema del laboratorio, trovare la relazione tra l'angolo formato dalla particella b rispetto alla direzione di volo della particella a , in funzione delle energie di a e b .

Problema 3

In un sistema di riferimento inerziale è presente un campo elettrico \vec{E} uniforme e costante parallelo all'asse x . Sia data una particella di carica q e massa m che all'istante $t = 0$ si trova nel punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$, con momento relativistico $\vec{p}_0 = (p_{0x}, p_{0y}, 0)$.

- I) Risolvere le equazioni del moto relativistiche e ricavare la legge oraria, ovvero $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.
- II) Usando i risultati del punto I), derivare il limite Newtoniano della legge oraria. Commentare i risultati ottenuti.
- III) Usando i risultati del punto I), calcolare la legge oraria a grandi t . Commentare i risultati ottenuti.

Problema 4

Si consideri la seguente densità Lagrangiana per il campo elettromagnetico A_μ accoppiato ad un campo scalare complesso $\Phi = \varphi_1 + i\varphi_2$, con φ_1 e φ_2 campi reali

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\Phi)^*D^\mu\Phi,$$

dove $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1. Scrivere le equazioni del moto per i campi A_μ , φ_1 e φ_2 .
2. Riscrivere e combinare opportunamente le 3 equazioni del moto in modo tale che compaiano solo i campi A_μ , Φ e il suo complesso coniugato Φ^* .
3. Applicando il teorema della Noether a seguito dell'invarianza della Lagrangiana per trasformazioni di fase del campo Φ , scrivere la corrente conservata.
4. Verificare esplicitamente che la corrente così scritta sia conservata.