**Elementi di fisica teorica**

Carlo Oleari

15/01/2018

Risolvere i seguenti problemi tenendo presente che risultati non semplificati o non ridotti ai minimi termini non saranno ritenuti validi.

Scrivere in modo chiaro e leggibile. Si consiglia di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

### Problema 1

Ricordando che, per una particella di massa $m$ avente velocità $\boldsymbol{u}$, la rapidità $\phi$ è data da

$$\tanh \phi(u) = \frac{u}{c}$$

(mettere pure $c = 1$ nel seguito), dimostrare che

1. $p = m \sinh \phi(u)$ e $E = m \cosh \phi(u)$, dove $p$ è la componente del momento relativistico lungo $\boldsymbol{u}$.
2. Per trasformazioni di Lorentz collineari al moto della particella con velocità $v$, mostrare che
$$\phi(u') = \phi(u) - \phi(v)$$

### Problema 2

Una macchina fotografica **lontana** scatta una foto di un proiettile che sta viaggiando a velocità relativistica $v$ e la cui lunghezza nel sistema di riposo è $l$. Dietro al proiettile e parallelamente alla sua direzione di volo, c'è un metro, fermo rispetto alla macchina fotografica. L'angolo tra la direzione di volo e la macchina fotografica sia $\theta$. Calcolare la lunghezza apparente del proiettile vista nella foto (ovvero di quanto il metro retrostante risulta nascosto dal proiettile).

### Problema 3

Un nucleo di ferro, fermo nel suo sistema di riferimento, decade emettendo un fotone gamma di frequenza $\nu_0$. Si consideri ora lo stesso nucleo in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ rispetto ad un osservatore inerziale. Quale frequenza $\nu$ misura questo osservatore?

Esprimere il risultato in termini di $\boldsymbol{v}$, $\nu_0$ e del versore $\boldsymbol{n}$ che punta dall'osservatore verso la posizione del nucleo all'atto dell'emissione.

**Problema 4**

In un sistema di riferimento inerziale è presente un campo elettrico $\bar{\mathbf{E}}$ uniforme e costante parallelo all'asse $x$. Sia data una particella di carica $q$ e massa $m$ che all'istante $t = 0$ si trova nel punto $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = (x_0, y_0, 0)$, con momento relativistico $\bar{\mathbf{p}}_\mathbf{0} = (p_{0x}, p_{0y}, 0)$.

I) Risolvere le equazioni del moto relativistiche e ricavare la legge oraria, ovvero $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.

II) Usando i risultati del punto I), derivare il limite Newtoniano della legge oraria. Commentare i risultati ottenuti.

III) Usando i risultati del punto I), calcolare la legge oraria a grandi $t$. Commentare i risultati ottenuti.

**Problema 5**

Si consideri la seguente densità Lagrangiana per un campo vettoriale $W^\mu$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} W^\nu \left(\partial_\mu \partial^\mu W_\nu - \partial_\nu \partial^\mu W_\mu\right) + a \left(\partial_\mu W^\mu\right)^2$$

dove $a$ è un parametro reale.

1. Si ricavi dapprima, l'equazione di campo per una generica lagrangiana $\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \partial_\nu \phi\right)$ che dipende da un campo, e dalle sue derivate prime e seconde.
2. Scrivere l'equazione del moto per il campo $W^\mu$, senza fare alcuna manipolazione della densità Lagrangiana.
3. Ricordando che è l'azione, ovvero l'integrale della densità Lagrangiana, la vera quantità da estremare, riscrivere la densità data in modo tale che non compaiano le derivate seconde dei campi.
4. Utilizzando la densità ricavata al punto precedente, derivare nuovamente le equazioni del moto.