

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

25/9/2012

1. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{C_r} \frac{1}{z(z-2/3)(z+3i)^2} dz$$

per i seguenti valori del raggio r della circonferenza C_r centrata nell'origine: $r = 1/2$, $r = 1$ e $r = 4$.

2. Sia dato l'operatore $T : \mathcal{L}^2(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ così definito

$$(Tf)(x) = f(ax + b), \quad a \neq 0 \text{ e } a, b \in \mathfrak{R}$$

1. Dimostrare che è ben definito e determinare il suo dominio.
2. Dimostrare che è limitato e calcolarne la norma.
3. Discutere se esiste l'operatore aggiunto e, nel caso, determinarlo.
4. Dire se esistono valori particolari di a, b per i quali l'operatore è autoaggiunto.
5. Per $a = -1$ e $b = 0$ calcolare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.

3. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} e^{ix}$$

4. Nel piano complesso, determinare e classificare i punti di singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2 \sin(1/z)}$$

e calcolare i residui nell'intorno delle singolarità. Non dimenticare di discutere anche il punto all'infinito.

5. Si scriva una funzione f reale di variabile reale tale che

1. $f(x) \in L^2[-1, 1]$ e $f(x) \notin L^2[-2, 2]$
2. $f(x) \in L^3[0, 1]$ e $f(x) \notin L^2[-2, 2]$
3. $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $f(x) \notin L^2(\mathbb{R})$
4. $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e $f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$