Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

4/9/2012

1. Si consideri la funzione

$$f(z) \quad = \quad \frac{5z^2 + 25z}{z^3\,(z+1)\,(z^2-25)} \;\sin\left(\frac{i}{(z+1)^2}\right)$$

1. Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
2. Si diano due sviluppi di Laurent della funzione nel punto $z = -1$ che convergono rispettivamente in un intorno di -1 e per $|z| > 5$.
3. Si calcoli il residuo nei punti singolari.

2. Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2\,[0\,,\,\infty)$ e su di esso la base di Laguerre $\{\mathcal{L}_n\}_{n=0,1,\ldots}$ definita da

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{n!}\;e^{-\frac{1}{2}x}\;L_n\,(x)$$
$$L_n\,(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

Si consideri il vettore $f \in \mathcal{L}^2\,[0\,,\,\infty)$ definito da

$$f\,(x) = \left(2x^2 - 5x + 1\right)\;e^{-\frac{1}{2}x}$$

1. Su quali vettori della base di Laguerre f ha componenti non nulle?
2. Scrivere i coefficienti dello sviluppo di f sulla base di Laguerre.

3. Si consideri la funzione $f(x)$ di variabile reale così definita

$$f(x) = \frac{\log(1+2x) - x}{(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}}\;e^{x^2}$$

1. A quali spazi $L^p[-\frac{1}{2}, 1]$ appartiene $f(x)$?
2. A quali spazi $L^p[1, \frac{5}{2}]$?

3. A quali spazi $L^p[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$?

4. A quali spazi $L^p[-\frac{1}{2}, \infty)$?

Si considerino per p solo valori interi positivi.

4. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x\, e^{-(x-2)^2}$$

5. Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \ldots\} = \{\alpha_2, 0, \alpha_1, \alpha_5, 0, \alpha_4, \ldots\}$$

1. Derivare $A^\dagger$. A è autoaggiunto?

2. Esiste l'operatore inverso A^{-1}? In caso affermativo, calcolarlo. In caso negativo, giustificare la risposta.

3. Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.