

## Compitino di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

27/7/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z^2 + 16\pi^2)}$$

indicarne gli zeri (precisandone l'ordine) e determinare le singolarità, classificandole e calcolando i corrispondenti residui. Non dimenticare la classificazione del punto all'infinito.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x & -2 \leq x \leq -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3. Si vuole calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ax}}{1 + e^x}, \quad 0 < a < 1$$

A tal fine:

1. studiare le singolarità della funzione integranda e calcolare i corrispondenti residui;
2. individuare un opportuno percorso di integrazione nel campo complesso, che racchiuda un numero finito di singolarità polari, e calcolare l'integrale col teorema dei residui.

4. Sia  $A$  l'operatore in  $L^2(a, b)$  con  $0 < a < b$  tale che

$$(Af)(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{d}{dx} + \frac{1}{x^4} \frac{d}{dx} x^4 \right] f(x)$$

definito per ogni funzione  $f$  assolutamente continua con  $f' \in L^2(a, b)$ , e tale che

$$a^2 f(a) = b^2 f(b)$$

Determinare lo spettro di  $A$ .

Suggerimento: risolvere il problema agli autovalori con il cambio di funzione  $f(x) = x^\alpha g(x)$ , per un opportuno valore di  $\alpha$ , da determinare. Assicurarsi che la trasformazione sia ben definita nell'intervallo di definizione della funzione.

5. Calcolare i primi tre coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = 1 - 2 \sin^2 x$$

sui polinomi di Hermite. Si ricorda che i polinomi di Hermite formano una base su  $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x^2) dx)$  e che  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ . Trascurare ogni fattore di normalizzazione.