Compitino di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

6/7/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\alpha z)}{1 - 2\sin^2(\pi z)}$$

con α parametro reale,

- indicarne gli zeri e le singolarità, discutendone la dipendenza dai possibili valori di α. Non dimenticare la discussione del punto all'infinito.
- Per $\alpha = 2\pi$, calcolare l'integrale

  $$I = \int_\sigma dz\, f(z)$$

  dove σ è la circonferenza di raggio 1/4 e centro in $z = -1/4$.

2. Date le seguenti due funzioni

$$\frac{\log(z+i)}{z^2}\,, \qquad \sqrt{z^2+1}$$

determinare le loro singolarità e indicare come si possono ottenere i campi di olomorfia.

4. Dopo aver individuato un opportuno percorso di integrazione nel campo complesso, calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,, \qquad 0 < a < 1$$

5. Calcolare i primi due coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = \sin^2 x$$

sui polinomi di Hermite. Si ricorda che i polinomi di Hermite formano una base su $L^2\left(\mathbb{R}, \exp(-x^2)\,dx\right)$ e che $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Trascurare ogni fattore di normalizzazione.

6. Calcolare il seguente integrale, usando opportunamente le proprietà delle trasformate di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

per valori $a, b > 0$ [Suggerimento: pensare l'integrale come convoluzione].

7. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$