Compito di Matematica per la Fisica
Silvia Penati, Carlo Oleari
21/6/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\alpha z)}{2\cos^2(\pi z) - 1}$$

con α parametro reale,

- indicarne gli zeri e le singolarità, discutendone la dipendenza dai possibili valori di α. Non dimenticare la discussione del punto all'infinito.
- Per $\alpha = 2\pi$, calcolare l'integrale

  $$I = \int_\sigma dz\, f(z)$$

  dove σ è la circonferenza di raggio 1/4 e centro in $z = -1/4$.

2. Date le funzioni

$$x \log|x|\,, \qquad \frac{x}{4+x^2}\,, \qquad \frac{1}{4+x^2}$$

dire per quali di esse esiste la trasformata di Fourier, giustificando la risposta, e in caso affermativo, calcolarla.

3. Calcolare, ultilizzando la teoria dei residui, l'integrale (prestare attenzione agli estremi di integrazione)

$$I = \int_0^{3\pi} d\theta\, \frac{1}{3i + \cos\theta}$$

4. Dato uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e un suo s.o.n.c. $\{u_n\}_{n\in\mathcal{N}}$, si consideri l'operatore $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$Tx = \sum_{n\in\mathcal{N}} \lambda_n (u_n|x) u_n$$

con $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri complessi.

- Verificare che se $\{\lambda_n\} \in l^\infty(\mathcal{C})$, allora T è ben definito e continuo.
- Calcolarne la norma.
- Discutere se esiste l'operatore aggiunto e, nel caso, determinarlo.
- Determinare autovalori e autofunzioni di T.

5. Calcolare i primi tre coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = \cos x$$

sui polinomi di Hermite. Si ricorda che i polinomi di Hermite formano una base su $L^2\left(\mathbb{R}, \exp(-x^2)\,dx\right)$ e che $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ e $H_2(x) = 4x^2 - 2$.