Compito di Matematica per la Fisica
Silvia Penati, Carlo Oleari
1/2/2012

1. Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \ldots\} = \{\alpha_2, \alpha_3, 0, \alpha_5, \alpha_6, 0, \ldots\}$$

- Derivare $A^\dagger$. A è autoaggiunto?
- Esiste l'operatore inverso A^{-1}. In caso affermativo, calcolarlo. In caso negativo, giustificare la risposta.
- Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.

2. Definenedo la trasformata di Fourier di $f(x)$ come

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx}\, f(x)\,,$$

si calcoli

- l'antitrasformata
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+k^2}\right]$$
- Utilizzando il risultato precedente, dopo aver indicato l'espressione della trasformata di Fourier della convoluzione
$$g(x) = e^{-|x|} * e^{-|x|}\,,$$
si calcoli la funzione $g(x)$.

3. Calcolare, ultilizzando la teoria dei residui, l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{2+\sin\theta}$$

4. Siano date le funzioni

$$f(z) = \frac{\pi z}{(z-1)^3} \qquad\qquad g(z) = \frac{e^{2z}}{e^z+1}$$

Indicare gli zeri (precisandone l'ordine) e le singolarità (classifiandole) delle due funzioni. A tal proposito non si dimentichi la discussione del punto all'infinito.

5. Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+4)}$$

darne diversi sviluppi in serie di potenze (precisando per ciascuno di essi l'insieme di convergenza) dai quali dedurre le natura dei punti $z = \infty$, $z = 0$, $z = 1$ e $z = -4$.