

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

22/11/2011

1. Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots\} = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_4, \dots\}$$

- Derivare A^\dagger . A è autoaggiunto?
- Calcolare l'inverso A^{-1} .
- Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.

2. Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ |x| & |x| \leq 1 \end{cases}$$

3. Calcolare, utilizzando la teoria dei residui, l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\sqrt{5} + \cos \theta}$$

4. Sia data la funzione

$$f(z) = \frac{\tan^2 \pi z}{z^2 (z-1)^3 (z^2-9)}$$

- Indicare gli zeri (precisandone l'ordine) e le singolarità (classificandole) di tale funzione. A tal proposito non si dimentichi la discussione del punto all'infinito.
- Calcolare

$$I = \int_{\sigma} dz f(z)$$

dove σ è la circonferenza di centro $C(1,0)$ e raggio $r = 1/4$, percorsa in senso antiorario.

5. Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-6)}$$

darne due sviluppi in serie di potenze (precisando per ciascuno di essi l'insieme di convergenza) dai quali dedurre la natura dei punti $z = \infty$ e $z = -2$.