Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

29/9/2011

1. Sia A l'operatore in $L^2(a,b)$ con $0 < a < b$ tale che

$$(Af)(x) = \frac{i}{2}\left[\frac{d}{dx} + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^2\right] f(x)$$

definito per ogni funzione f assolutamente continua con $f' \in L^2(a,b)$, e tale che

$$af(a) = bf(b)$$

Determinare lo spettro di A.
Suggerimento: risolvere il problema agli autovalori con il cambio di funzione $f(x) = x^\alpha g(x)$, per un opportuno valore di α, da determinare. Assicurarsi che la trasformazione sia ben definita nell'intervallo di definizione della funzione.

2. Si consideri la funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n$$

- Verificare che

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

- Dimostrare che $H_n(x)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

3. Sia data la funzione

$$f(x) = \theta(x+a) - \theta(x-a)\,, \qquad \text{con} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(f)$ e commentare il risultato in termini delle proprietà generali della trasformata stessa.

- Usando le proprietà della trasformata, calcolare $\mathcal{F}(f')$. Come nel punto precedente, discutere il risultato ottenuto.

4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^a}{[1 - \cos^2(\sqrt{x})]^b}$$

Determinare per quali valori di $a, b \in \Re$ la funzione appartiene a $\mathcal{L}^1[0, +\infty)$.

5. Data la funzione nel piano complesso

$$f(z) = \frac{z^2}{9 + z^3}$$

- Si indentifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- Si scriva lo sviluppo della funzione in un intorno di $z = 0$.