Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

2/9/2011

1. Scrivere lo sviluppo di Laurent in $z = 2$ per la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 5z + 6}$$

e determinare il raggio di convergenza.

2. Applicando le proprietà generali della trasformata di Fourier, calcolare $\mathcal{F}(f)$ per

$$f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

3. Nello spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ si consideri l'operatore

$$(Af)(x) = \alpha + \beta \int_{-\pi}^{\pi} dy \, \cos(x - y) \, f(y)$$

Determinare per quali valori dei parametri complessi α e β l'operatore è un proiettore ortogonale.

4. Nello spazio lineare delle matrici complesse $n \times n$ si consideri l'applicazione

$$(M, N) = \mathrm{Tr}(M^\dagger N)$$

dove $\mathrm{Tr}(M) \equiv \sum_i M_{ii}$ è la traccia della matrice. Stabilire se è un prodotto interno.

5. Si consideri la funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n$$

1. Ricavare esplicitamente le espressioni per $H_n(x)$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

2. Verificare che

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

3. Dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-x^2} \, H_m(x) \, H_n(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2^n \, n! \, \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$