Compito di Matematica per la Fisica
Silvia Penati, Carlo Oleari
28/6/2011

1. Si consideri l'equazione di Bessel

$$x^2\, y'' + x\, y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

con ν numero reale, positivo, non naturale (ovvero $\nu \neq 0, 1, 2, 3 \ldots$).

- Trovare la soluzione generale dell'equazione, nella famiglia delle funzioni col seguente sviluppo in serie

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^k$$

- Ricordando che le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$ sono normalizzate in modo tale che

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu + 1)}$$

  e che nel caso in cui ν sia un numero semi-intero sono esprimibili in termini di funzioni trigonometriche, ricavare $J_{1/2}(x)$.

2. Calcolare il seguente integrale, usando opportunamente le proprietà delle trasformate di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

per valori $a, b > 0$ [Suggerimento: pensare l'integrale come convoluzione].

3. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ una successione di numeri reali, strettamente positivi. Dato lo spazio lineare delle successioni

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathcal{N}} \,\middle|\, x_n \in \Re \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n^2 < +\infty \right\}$$

dimostrare che l'applicazione $(x|y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n y_n$ è un prodotto scalare su X (dimostrare che è ben definito e gode delle proprietà definitorie del prodotto scalare).

4. Determinare le singolarità nel piano complesso della funzione

$$f(z) = \frac{z + 2i}{z^3 - 8i} \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

e calcolare i residui in tali punti.

5. Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\} = \{\alpha_2, 0, \alpha_4, 0, \cdots\}$$

- Verificare che è limitato e calcolarne la norma.
- Costruire $A^\dagger$ e A^2.
- Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.