

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

21/6/2011

1. Sia data la funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x - \log(1+x)}{(x^4 + x^2)(x+3)^2}$$

A quali spazi $L^p(-\frac{1}{2}, \infty)$ appartiene questa funzione?

2. Sia data l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) f(x-y) = e^{-x^2}$$

- Trovare la soluzione dell'equazione.
- Verificare esplicitamente che la soluzione trovata soddisfi l'equazione integrale.

3. Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e P e Q due proiettori tali che $PQ = Q$. Per generici $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ non nulli, si consideri l'operatore $A = \alpha P + \beta Q$.

- Determinare la relazione fra i ranghi dei due proiettori, $\mathcal{R}(P)$ e $\mathcal{R}(Q)$.
- Calcolare la norma di A .
- Determinare lo spettro di A [Suggerimento: applicare opportunamente i proiettori P e Q all'equazione agli autovalori stando attenti a non banalizzare l'equazione].
- Per quali valori di $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, A è un proiettore? Motivare la risposta.

4. Usando i teoremi dell'analisi complessa, calcolare i seguenti integrali

$$a) \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin z}{z^2} dz \quad b) \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin z}{z^3} dz \quad c) \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin z}{z^4} dz$$

Sia $n \in \mathbb{N}$. Determinare

$$d) \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin z}{z^{2n+1}} dz \quad e) \oint_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin z}{z^{2n}} dz$$

5. Si consideri l'equazione di Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

con ν numero reale, positivo, non naturale (ovvero $\nu \neq 0, 1, 2, 3, \dots$).

- Trovare la soluzione generale dell'equazione, nella famiglia delle funzioni col seguente sviluppo in serie

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

- Ricordando che le funzioni di Bessel $J_\nu(x)$ sono normalizzate in modo tale che

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$$

e che nel caso in cui ν sia un numero semi-intero sono esprimibili in termini di funzioni trigonometriche, ricavare $J_{1/2}(x)$.