A.2 The δ distribution

La δ di Dirac è una distribuzione (o funzione generalizzata) definita dal seguente integrale ($a < b$)

$$\int_a^b dx\, f(x)\, \delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{A.7}$$

dove $f(x)$ è una funzione sufficientemente regolare nell'intorno di x_0. Inoltre, x_0 deve appartenere all'intervallo di integrazione. Altrimenti l'integrale è zero. Dalla (A.7) segue immediatamente che

$$\int dx\, \delta(x - x_0) = 1 \tag{A.8}$$

e, con un semplice cambio di variabili nell'integrale, che

$$\delta(a\,(x - x_0)) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x - x_0)\,. \tag{A.9}$$

A partire dall'eq. (A.7), possiamo anche dare un significato alle derivate della delta. Per esempio, integrando per parti ($a < x_0 < b$)

$$\begin{aligned} \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{d}{dx}\delta(x - x_0) &= \int_a^b dx\, \frac{d}{dx}\left[f(x)\, \delta(x - x_0)\right] - \int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) \\ &= f(x)\, \delta(x - x_0)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) \\ &= -\int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, \delta(x - x_0) = -\left(\frac{df}{dx}\right)_{x = x_0}\,. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Quindi possiamo scrivere in modo formale

$$\frac{d}{dx}\delta(x - x_0) = -\delta(x - x_0)\frac{d}{dx}\,. \tag{A.11}$$

Le derivate di ordine superiore si calcolano integrando ripetutamente per parti, scaricando una alla volta le derivate dalla δ sulla funzione.

La funziona a gradino

Dalla definizione (A.7) si può scrivere (a è un parametro dato)

$$\int_{-\infty}^x dy\, \delta(y - a) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x > a \end{cases} \equiv \theta(x - a) \tag{A.12}$$

chiamata anche "funzione θ". Derivando l'equazione si può dare significato preciso alla derivata di un gradino

$$\frac{d}{dx}\theta(x - a) = \delta(x - a) \tag{A.13}$$

Importante identità
Una relazione molto importante è la seguente

$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|dg/dx(x_i)|}\,, \tag{A.14}$$

dove gli x_i sono le radici (semplici) di $g(x)$ nell'intervallo di integrazione.

"Rappresentazioni" della $\boldsymbol{\delta}$
In generale, ogni funzione "molto piccata", normalizzata a 1 e con la larghezza che va a zero, può essere usata come "rappresentazione" della distribuzione δ.

1. $$\delta(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} R(x, \epsilon) \tag{A.15}$$

   dove

   $$R(x,\epsilon) = \begin{cases} 0 & x < -\epsilon \\ \dfrac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < x < \epsilon \\ 0 & x > \epsilon \end{cases} \tag{A.16}$$

2. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \tag{A.17}$$

3. $$\delta(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \tag{A.18}$$

4. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 x^2) \tag{A.19}$$

5. $$\delta(x) = \lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\pi \alpha x^2} \tag{A.20}$$

6. $$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = \mathrm{VP}\, \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{A.21}$$

   dove "VP" indica l'integrazione fatta in Valor Principale, ovvero, se $a < 0 < b$ e $\epsilon > 0$

   $$\mathrm{VP} \int_a^b dx\, \frac{1}{x}\, f(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left\{ \int_a^{-\epsilon} dx\, \frac{1}{x}\, f(x) + \int_\epsilon^b dx\, \frac{1}{x}\, f(x) \right\} \tag{A.22}$$

Esercizio: Dimostrare l'eq. (A.14).

Esercizio: Verificare che le funzioni dall'eq. (A.15) all'eq. (A.22) sono normalizzate a 1.

Esercizio
Dimostare che

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \, \frac{\delta(1-x-y)}{(ax+by)^2} = \frac{1}{ab} \tag{A.23}$$

Esercizio
Dimostare che

$$2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^3} = \frac{1}{abc} \tag{A.24}$$

Esercizio
Dimostare che

$$6\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, y \, \frac{\delta(1-x-y-z)}{(ax+by+cz)^4} = \frac{1}{ab^2c} \tag{A.25}$$

A.3 The dilogarithm function

The dilogarithm function is defined by

$$\mathrm{Li}_2\,(x) = -\int_0^x dz \, \frac{\log(1-z)}{z} \qquad x \le 1\,, \tag{A.26}$$

and an immediate consequence of this definition is the following expansion in powers of ϵ

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx\, x^{-1-\gamma\,\epsilon}\,(1-\alpha\,x)^{\beta\,\epsilon} &= \int_0^1 dx\, x^{-1-\gamma\,\epsilon}\left[1+\beta\,\epsilon\log(1-\alpha\,x)+\mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\gamma\,\epsilon} - \beta\,\epsilon\,\mathrm{Li}_2\,(\alpha) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)\ . \end{aligned} \tag{A.27}$$

It can easiky be shown that

$$\int_0^\alpha dz \, \frac{\log(1+\beta z)}{z} = -\,\mathrm{Li}_2\,(-\alpha\beta) \tag{A.28}$$

One of the most used properties is the analytic continuation of the dilogarithm function

$$\mathrm{Li}_2\,(x \pm i\eta) = -\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log^2 x + \frac{\pi^2}{3} \pm i\pi\log x \qquad x > 1\,, \tag{A.29}$$