II Compitino di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

14/6/2011

1. In $L^2([0,1])$ si consideri

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2([0,1]) \,|\, f \in AC[0,1]\ ,\ f' \in L^2([0,1])\ ,\ f(0) = f(1)\}$$

e l'operatore

$$f : \mathcal{D}(A) \to L^2([0,1]) \qquad\qquad Af = f - if'$$

- Verificare che A è autoaggiunto.
- Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.
- L'insieme delle autofunzioni è un s.o.n.c.? Motivare la risposta.

2. Applicando le proprietà generali della trasformata di Fourier, calcolare $\mathcal{F}(f)$ per

a) $f(x) = x^2 e^{-3\,|x-1|}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{(x+i)^2}$

3. Nella classe delle funzioni derivabili in $\Re$, si consideri l'applicazione

$$(f|g) = \int_a^b dx\, \bar{f}'(x)\, g'(x)\,, \qquad -\infty < a < b < +\infty$$

- Discutere se tale applicazione definisce un prodotto interno in $E = \mathcal{C}^{(1)}[a,b]$.
- In caso di risposta negativa, definire un opportuno spazio in cui l'applicazione sia prodotto interno.

4. Si consideri l'operatore $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definito da

$$A(e_i) = \alpha\, e_{i+1} + \beta\, e_{i-1}\ ,$$

dove $\{e_i\}_{i=1}^n$ è una base di $\mathbb{C}^n$ (per convenzione, $e_0 = e_{n+1} = 0$). Per quali valori di α e β A è hermitiano?

5. Si consideri una generica funzione $f(\theta, \phi)$, con $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$.

1. Si scriva l'espressione del generico coefficiente f_{lm} dell'espansione della funzione f sulla base delle armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta, \phi)$.

2. Nel caso in cui f sia data da

$$f(\theta, \phi) = \sin^2\theta \cos^2\phi + \frac{1}{2}\sin 2\theta \cos\phi + 1\,,$$

calcolare i coefficienti dell'espansione in serie, facendo il minor numero possibile di integrali.

Si ricorda che le prime armoniche sferiche sono date da:

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} \\
Y_{1-1} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sin\theta \exp(-i\,\phi) \\
Y_{10} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta \\
Y_{11} &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sin\theta \exp(i\,\phi) \\
Y_{2-2} &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{30}{\pi}}\sin^2\theta \exp(-2i\,\phi) \\
Y_{2-1} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{30}{\pi}}\sin\theta\cos\theta \exp(-i\,\phi) \\
Y_{20} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
Y_{21} &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{30}{\pi}}\sin\theta\cos\theta \exp(i\,\phi) \\
Y_{22} &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{30}{\pi}}\sin^2\theta \exp(2i\,\phi)
\end{aligned}$$