Complementi di teoria quantistica dei campi

Carlo Oleari

07/03/2016

Si consideri la seguente Lagrangiana per un campo scalare

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4$$

di massa m, con una interazione del tipo ϕ^4.

Si vuole calcolare l'ampiezza di scattering $\phi(p_1)\,\phi(p_2) \;\to\; \phi(p_3)\,\phi(p_4)$ fino all'ordine λ^2, ovvero fino ad un loop, nella regione fisica di scattering:

$$s \equiv (p_1+p_2)^2 > 0, \qquad t \equiv (p_1-p_3)^2 < 0, \qquad u \equiv (p_1-p_4)^2 < 0,$$

dove con p_i si sono indicati i momenti delle particelle scalari coinvolte nello scattering.

1. Disegnare i diagrammi di Feynman che contribuiscono a tale processo di scattering, e scriverne le corrispondenti espressioni matematiche.

2. Si usi la regolarizzazione dimensionale, $d = 4 - 2\epsilon$, per il calcolo degli integrali divergenti. Si consideri solo il caso in cui la massa possa essere totalmente trascurata, ovvero $m = 0$.

3. Rinormalizzare la costante di accoppiamento λ e scrivere l'ampiezza di scattering in termini della costante rinormalizzata λ_R.

4. Ricavare il primo coefficiente della β function che descrive il running della costante rinormalizzata. Discutere il comportamento della teoria nell'infrarosso e nell'ultravioletto dettato da tale coefficiente.

NB: Scrivere in modo chiaro e leggibile. Siete vivamente pregati di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.

Si dia per dimostrata la seguente identità

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{d^d\ell}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left[(\ell+p_1)^2 - m_1^2 + i\eta\right]\left[(\ell+p_{12})^2 - m_2^2 + i\eta\right]\dots\left[(\ell+p_{12\dots n})^2 - m_n^2 + i\eta\right]} \\
&= (-1)^n \frac{i}{(4\pi)^{\left(\frac{d}{2}\right)}}\,\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)\int_0^1 \prod_{i=1}^n d\alpha_i\,\frac{\delta(1-\sum_{i=1}^n \alpha_i)}{D^{n-\frac{d}{2}}}\ ,
\end{aligned}$$

dove

$$D = -\sum_{i>j} \alpha_i\, \alpha_j\, s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, m_i^2 - i\eta \ ,$$

e s_{ij} è il quadrato del momento che fluisce attraverso il taglio i-j del diagramma di Feynman che rappresenta I.

Si ricorda inoltre il volume angolare in d dimensioni

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}$$