Complementi di teoria quantistica dei campi

Carlo Oleari

19/10/2015

1. Si consideri la soluzione dell'equazione di Dirac

$$i\left(\partial_0\gamma^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{\gamma}\right)\psi - m\psi = 0$$

scritta nella seguente forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u_+ + u_- \\ u_+ - u_- \end{pmatrix}$$

dove u_+ e u_- sono spinori che appartengono alle rappresentazioni $(0, 1/2)$ e $(1/2, 0)$ del gruppo di Lorentz, rispettivamente.

(a) Ricavare le equazioni alle quali soddisfano u_+ e u_-.

(b) Verificare che gli spinori sono soluzioni anche dell'equazione di Klein-Gordon

$$\left(\Box + m^2\right)u_\pm = 0$$

(c) Ricordando che gli spinori $u_\pm$ si trasformano, a seguito di un boost di rapidità ϕ lungo la direzione del versore $\vec{e}$, come

$$u_\pm \;\to\; e^{\pm\frac{\phi}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{e}}\,u_\pm\,,$$

ricavare la rappresentazione per il boost $B(\phi,\vec{e})$ per ψ

$$\psi \;\to\; B(\phi,\vec{e})\,\psi\,.$$

Scrivere il boost in termini delle funzioni iperboliche con argomento $\phi/2$ e delle matrici $\vec{\sigma}$.

(d) Cercare una soluzione dell'equazione di Dirac nella forma

$$\psi = u_{\vec{p}}\,e^{-ipx}$$

e determinare a che equazione deve soddisfare $u_{\vec{p}}$.

(e) Determinare esplicitamente le due soluzioni $u_{\vec{0}}^{(r)}$, $r = 1$ e 2, per una particella ferma nel sistema di riferimento, ovvero $p = (m,\vec{0})$. Normalizzare le soluzioni in modo tale che

$$u_{\vec{0}}^{(r)\dagger}u_{\vec{0}}^{(s)} = 2\,m\,\delta_{rs}$$

(f) Ricavare $u_{\vec{p}}^{(r)}$ boostando opportunamente $u_{\vec{0}}^{(r)}$ con la matrice B calcolata al punto 1c.

(g) Scrivere esplicitamente $u_{\vec{p}}^{(1)}$ e $u_{\vec{p}}^{(2)}$ nel caso in cui $\vec{p}$ sia allineato lungo l'asse z.

(h) Verificare che per le due soluzioni trovate al punto precedente vale

$$(\not{p} - m)\, u_{\vec{p}}^{(r)} = 0$$

Per questo esercizio, usare la seguente rappresentazione delle matrici gamma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare la funzione di Green

$$\langle \mathbf{r}', t' | \mathbf{r}, t \rangle$$

per l'Hamiltoniana libera

$$H = \frac{\mathbf{p^2}}{2m}$$

e verificare che non soddisfa il principio di località/causalità/clustering.

Si ricorda che

$$\langle x | p_x \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i p_x x}{\hbar}\right), \ldots$$

NB: Scrivere in modo chiaro e leggibile. Siete vivamente pregati di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.