Complementi di teoria quantistica dei campi

Carlo Oleari

14/09/2015

1. Dopo averne dato la definizione, ricavare esplicitamente una rappresentazione per i generatori del gruppo di Lorentz e le loro regole di commutazione.

2. Sia data una particella con quadri-momento $p = E(2, 1, 1, 0)$, dove E ha dimensioni di un'energia, nel sistema del laboratorio. Calcolare la trasformata di Lorentz per passare dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa della particella.

3. Si consideri il campo scalare quantistico

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}}\, e^{-ik\cdot x} + a^\dagger_{\vec{k}}\, e^{ik\cdot x}\right]$$

con $a^\dagger_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}$ operatori di creazione e distruzione di una eccitazione avente tri-momento $\vec{k}$ e massa m. Calcolare

   a) $[\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)]$
   b) $[\Phi(\vec{x}, t), \partial_t \Phi(\vec{y}, t)]$
   c) verificare che $\Phi(x)$ soddisfa all'equazione di Klein–Gordon.

4. Si consideri lo spinore u_+ che trasforma sotto la rappresentazione (0,1/2) del gruppo di Lorentz. Ricordando che in questa rappresentazione una rotazione di un angolo θ attorno al vettore unitario $\vec{e}$ è data da

$$D(R(\vec{e}\,\theta)) = \exp\left(-i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\right),$$

e un boost di rapidità ϕ da

$$D(A(\vec{e}\,\phi)) = \exp\left(+\frac{\phi}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{e}\right),$$

dimostare che è possibile scrivere un quadri-vettore usando u_+, $u_+^\dagger$ e $\vec{\sigma}$. Mostrare esplicitamente che ciò che si è costruito si trasforma effettivamente come un quadri-vettore sotto una rotazione o un boost.

Si ricorda che $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ e $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\,i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$

NB: Scrivere in modo chiaro e leggibile. Siete vivamente pregati di fare i calcoli prima in brutta copia, e di riportali solo successivamente in bella copia. Formule e soluzioni pasticciate saranno pesantemente penalizzate, anche se corrette.