

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

10/07/2026

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m e spin $1/2$, soggetta al potenziale

$$\hat{V} = \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) - \frac{3}{2}\hbar\omega\sigma_3,$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli.

- a) Determinare i livelli energetici e discutere la degenerazione dei primi **quattro** livelli con energia più bassa.
- b) Si aggiunga poi al potenziale il termine perturbativo

$$\hat{V}_1 = \lambda(\hat{x}\sigma_2 - \hat{y}\sigma_1)$$

con λ costante reale. Calcolare l'energia dello stato fondamentale al **secondo** ordine perturbativo in λ .

Problema 2

Sia data una particella di massa m , vincolata a muoversi in una dimensione, sottoposta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < -2a, \\ \frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x+a) + \frac{\gamma\hbar^2}{2m}\delta(x-a) & -2a < x < 2a, \\ +\infty & x > 2a \end{cases} \quad \gamma, a > 0.$$

Ricordando che le autofunzioni di un potenziale invariante sotto parità, $V(-x) = V(x)$, possono essere scelte pari o dispari,

- a) scrivere l'equazione che determina i valori delle energie delle autofunzioni **dispari** e discuterla graficamente;
- b) scrivere l'equazione che determina i valori delle energie delle autofunzioni **pari** e discuterla graficamente;

c) discutere cosa succede allo spettro per $\gamma \rightarrow 0$ e per $\gamma \rightarrow \infty$.

Problema 3

Una particella di massa m in tre dimensioni è descritta dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}(r + x + iy - z) f(r)$$

dove $\mathcal{N}$ è la costante di normalizzazione ed r è la distanza dall'origine. Calcolare i possibili valori di una misura di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ e $\hat{L}_x$, con le corrispondenti probabilità.