

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

12/6/2026

Risolvere i seguenti esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia dato un sistema monodimensionale di due particelle distinguibili di massa m soggette al potenziale

$$\frac{m\omega^2}{4} (5x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2) - \sqrt{\frac{3m\hbar}{2}} \omega^{3/2} (x_1 - x_2)$$

- a) Calcolare lo spettro in energia del sistema.
- b) Scrivere la forma più generale dello stato di energia $E = 2\hbar\omega$ e

$$\langle x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}.$$

Problema 2

Sia dato un sistema quantistico descritto dai tre stati $|a\rangle$, con $a = 1, 2, 3$, di energia $\hbar\omega$, 0 e $-\hbar\omega$, rispettivamente, avente quindi l'Hamiltoniana rappresentata dalla seguente matrice

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $\omega > 0$. Al tempo $t = 0$, il sistema, che si trova nello stato $|1\rangle$, viene sottoposto alla perturbazione rappresentata da

$$V = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

con λ e $\mu > 0$ numeri reali.

Determinare, al secondo ordine in λ nella teoria delle perturbazioni, la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|3\rangle$ a $t \rightarrow \infty$.

Problema 3

Due particelle **distinguibili** di spin $1/2$, aventi spin $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$, sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar} \left(\hat{S}_x^{(1)} \hat{S}_y^{(2)} - \hat{S}_y^{(1)} \hat{S}_x^{(2)} \right),$$

con A costante positiva. Determinare

- a) i livelli energetici e la relativa degenerazione;
- b) la probabilità per lo spin totale $\hat{S}^2$ al generico istante t , sapendo che a $t = 0$ il sistema si trovava in uno stato di singoletto.