

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

6/2/2026

Risolvere i seguenti esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Siano date due particelle **identiche** di spin 0 su un cerchio con Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi_1^2} + \frac{d^2}{d\varphi_2^2} \right).$$

- a) Determinare i primi tre livelli energetici e la relativa degenerazione.
- b) Determinare come cambiano le energie dei livelli trovati al punto a) a causa della perturbazione

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = A \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

al primo ordine in A .

Problema 2

Sia dato un sistema quantistico descritto dai quattro stati $|a\rangle$, con $a = 1, 2, 3, 4$, di energia $-\epsilon, 0, \epsilon$ e 0 , rispettivamente. Sia introdotta una perturbazione $\hat{V}$ i cui unici elementi di matrice non nulli siano

$$\langle 1|\hat{V}|3\rangle = \langle 3|\hat{V}|1\rangle = \langle 4|\hat{V}|2\rangle = \langle 2|\hat{V}|4\rangle = \lambda,$$

con λ parametro reale. Determinare:

- a) le correzioni ai livelli energetici **non degeneri** al **secondo** ordine nella teoria delle perturbazioni in λ ;
- b) le correzioni ai livelli energetici **degeneri** al **primo** ordine nella teoria delle perturbazioni in λ ;
- c) confrontare i risultati ottenuti con i livelli energetici esatti del problema.

Problema 3

Sia dato il sistema descritto dall'operatore Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) + \beta \hat{L}_y, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

con funzione d'onda, a $t = 0$, data da

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione e $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

- a) Determinare al tempo $t = 0$ i possibili risultati e le probabilità di una misura di L^2 , L_x , L_y e L_z .
- b) Determinare la funzione d'onda al **generico tempo t** .
- c) Determinare la probabilità che, al generico tempo t , il sistema abbia proiezione del momento angolare lungo l'asse z uguale a $+\hbar$.