

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

19/01/2026

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Due fermioni **identici** di spin $1/2$, massa m e posizioni x_1 e x_2 , sono soggetti al potenziale monodimensionale

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + \mu p_1 p_2.$$

Determinare, usando la teoria delle perturbazioni,

1. le correzioni all'energia dello stato fondamentale **fino** al **secondo ordine** in μ ;
2. le correzioni all'energia del primo stato eccitato al primo ordine in μ .

Problema 2

Siano dati l'Hamiltoniana e il vettore d'onda al tempo $t = 0$

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 + i\omega_2 \\ \omega_1 - i\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con ω_1 ed ω_2 reali. Al **tempo** t :

1. determinare la probabilità che il sistema si trovi nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
2. calcolare il valor medio dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3

Sia data una particella su un cerchio di raggio R , descritta dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \lambda \delta(\varphi), \quad \lambda > 0,$$

dove $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$. Con questa scelta dell'intervallo angolare, l'Hamiltoniana risulta evidentemente invariante sotto trasformazioni di “parità” $\varphi \rightarrow -\varphi$ e, di conseguenza, le autofunzioni di $\hat{H}$ **possono** essere scelte **pari o dispari**.

- a) Determinare energie e autofunzioni per $\lambda = 0$, in una base in cui siano di parità definita.

Discutere la degenerazione delle energie così trovate.

- b) Determinare come le autofunzioni e le energie del punto precedente vengono modificate per $\lambda \neq 0$.

- c) Disegnare il grafico qualitativo delle autofunzioni per $\lambda = 0$ e per $\lambda \neq 0$.