

Meccanica Quantistica

II compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

8/1/2026

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Si consideri il sistema di due fermioni **distinguibili** di spin $1/2$, aventi spin $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{2A}{\hbar} \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)} + A \left(\hat{S}_z^{(1)} - \hat{S}_z^{(2)} \right),$$

con A costante. Al tempo $t = 0$, lo spin totale del sistema è zero.

Al generico **tempo** t determinare:

- a) lo stato del sistema;
- b) i valori della proiezione dello spin totale lungo l'asse z e le corrispondenti probabilità.

Problema 2

Sia data una particella su un cerchio di raggio R , descritta dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda \delta(\varphi - \pi).$$

- a) Determinare le correzioni all'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in λ .
Si ricordi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- b) Determinare le correzioni degli stati eccitati al primo ordine in λ .
- c) **Facoltativo:** confrontare col risultato esatto.

Problema 3

Due particelle **distinguibili** di spin $1/2$, aventi coordinate spaziali $\vec{x}_1$ ed $\vec{x}_2$ nello spazio tridimensionale, sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2} \left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 \right).$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nello stato orbitale $|1, 0, 0\rangle \otimes |1, 0, 0\rangle$ dei due oscillatori e abbia spin totale uguale a zero (si sta usando la notazione standard $|n_x, n_y, n_z\rangle$ di un oscillatore armonico isotropo in tre dimensioni).

Determinare a **tempi grandi** la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale a causa della perturbazione

$$\hat{V} = A \left(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\vec{x}}_1 + \vec{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\vec{x}}_2 \right) e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0,$$

al **secondo ordine** in A .

Le $\vec{\sigma}^{(p)}$ sono le 3 matrici di Pauli che agiscono rispettivamente nello spazio della prima ($p = 1$) e della seconda ($p = 2$) particella.