Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

13/02/2025

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2. Al tempo $t = 0$, lo spin della prima particella punti nella direzione positiva dell'asse x e quello della seconda nella direzione individuata dal versore $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. L'interazione delle due particelle è descritta dall'Hamiltoniana

$$H = 2\omega \left(S_z^{(2)} - S_z^{(1)} \right),$$

dove $S_z^{(i)}$ sono le componenti dello spin della particella i-esima lungo l'asse z. Determinare

a) quali valori della misura dello spin totale e della sua proiezione lungo l'asse z si ottengono, e con quali probabilità, al **generico istante** t;

b) il valor medio di $S_x^{(2)}$ al tempo t.

Problema 2

Dato un oscillatore armonico tridimensionale isotropo, con potenziale

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \equiv \frac{m\omega^2}{2} r^2,$$

descritto al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N}\, y\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2},$$

con $\mathcal{N}$ costante di normalizzazione, determinare

a) i valori medi di L^2, L_x, L_y ed L_z, al tempo $t = 0$.

b) la probabilità che, a tempi grandi, l'oscillatore si trovi nello stato $|1, 0, 0\rangle$ (notazione $|n_x, n_y, n_z\rangle$) per effetto della perturbazione $A(x + y)e^{-\gamma t}$, al secondo ordine in A.

Problema 3

Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, determinare le correzioni all'energia del livello $n = 2$ di un atomo di idrogeno, posto in un campo magnetico $\vec{B} = \mathcal{B}\,\vec{e}_z$ e un campo elettrico $\vec{E} = \mathcal{E}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + \mathcal{E}^*(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$, a causa dell'interazione

$$H_I = -\frac{\mu}{\hbar}\vec{B}\cdot\vec{L} - q\vec{E}\cdot\vec{x}.$$

Si ignorino la struttura fine ed iperfine.

Si ricorda che le autofunzioni dell'atomo di idrogeno hanno la forma $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, e

$$R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}, \qquad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24a_0^3}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}},$$

dove a_0 è il raggio di Bohr.