Meccanica Quantistica
II compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

9/1/2025

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Sia dato un sistema quantistico descritto dai tre stati $|a\rangle$, con $a = 1, 2, 3$, di energia $-\hbar\omega$, 0 e $\hbar\omega$, rispettivamente, avente quindi l'Hamiltoniana rappresentata dalla seguente matrice

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $\omega > 0$. Al tempo $t = 0$, il sistema, che si trova nello stato $|1\rangle$, viene sottoposto alla perturbazione rappresentata da

$$V = \hbar\omega\, e^{-\omega t} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda^2 & \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

con λ numero reale.

Determinare, al secondo ordine in λ nella teoria delle perturbazioni, la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|3\rangle$ a $t \to \infty$.

Problema 2

Due particelle **distinguibili** di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$, sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar}\left(\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_y^{(2)} + \hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}\right),$$

con A costante positiva. Determinare

a) i livelli energetici e la relativa degenerazione;

b) il valor medio della componente dello spin totale $\hat{S}_z$ al generico istante t, sapendo che a $t = 0$ il sistema si trovava in uno stato di tripletto con proiezione dello spin totale lungo l'asse z pari ad $\hbar$.

Problema 3

Siano date due particelle, vincolate a muoversi su di una circonferenza di raggio R, descritte dall'Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi_1^2} + \frac{d^2}{d\varphi_2^2}\right),$$

con $-\pi \leq \varphi_i \leq \pi$.

i) Determinare i primi **tre** livelli energetici e la relativa degenerazione nel caso di

a) particelle **distinguibili**;

b) particelle **identiche** di spin 0;

c) particelle **identiche** di spin 1/2;

ii) In ciascuno dei casi sopraindicati, determinare le correzioni all'energia del **solo** primo stato eccitato, al primo ordine in A, dovute alla perturbazione

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = A\,\delta(\varphi_1 + \varphi_2)$$

con A costante positiva. Notare il segno nell'argomento della delta di Dirac.