Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

16/09/2024

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m vincolata a muoversi nell'intervallo $[0, a]$ da due barriere di potenziale impenetrabili situate a $x = 0$ e $x = a$. La funzione d'onda al tempo $t = 0$ sia

$$\mathcal{N}\left(\sin\frac{\pi x}{a} + 2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a} + \sin\frac{3\pi x}{a}\right),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione. Determinare:

a) i possibili valori di una misura dell'energia e le rispettive probabilità

b) il valor medio di $\hat{p}$

c) la probabilità che **al tempo *t*** il sistema si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}'\left(\sin\frac{\pi x}{a} - 2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

con $\mathcal{N}'$ costante di normalizzazione.

Problema 2

Due particelle **identiche di spin** 1/2 si muovono su un cerchio di raggio R e sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_1^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_2^2} + A\,\delta(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

Determinare l'energia dello stato fondamentale all'ordine $\mathcal{O}(A)^2$ e del primo stato eccitato all'ordine $\mathcal{O}(A)$. È utile ricordare che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Problema 3

Si consideri il sistema di due fermioni distinguibili di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{A}{\hbar^2}\,\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(2)},$$

con A costante. Calcolare la probabilità che lo stato di momento angolare totale zero a tempo $t = 0$ transisca a quello di momento angolare totale uno a $t = \infty$ a causa della perturbazione

$$\hat{H}_1 = \frac{2\lambda}{\hbar^2}\left(\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_y^{(2)} - \hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}\right)e^{-\gamma t}, \qquad \gamma > 0$$

al primo ordine nel parametro λ.