Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

15/07/2024

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m e carica q, senza spin, immersa in un potenziale armonico isotropo in tre dimensioni di frequenza ω, avente funzione d'onda nell'istante iniziale $t = 0$ data da

$$\psi(x, y, z; 0) = N\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+z^2)}\,,$$

con N costante di normalizzazione. Determinare

a) i valor medi di $(x^2 + y^2 + z^2)$ e L_z, al tempo $t = 0$;

b) la probabilità dei risultati di una misura di L_z al **tempo $\boldsymbol{t}$**, se al tempo $t = 0$ viene acceso un campo magnetico costante B_0 diretto nella direzione y.

   Trascurare i termini quadratici in B_0 nell'Hamiltoniana di interazione.

NB: **non** è un problema da risolvere con la teoria delle perturbazioni. Va risolto esattamente.

Problema 2

Sia data una particella in una buca monodimensionale impenetrabile che la confina nella regione $[0, R]$.

a) Calcolare le correzioni all'energia

   I) dello stato fondamentale

   II) e del primo stato eccitato

   della buca dovute al potenziale

$$\lambda\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\delta\!\left(x - \frac{R}{2}\right), \qquad \lambda > 0,$$

   fino al **secondo ordine** in λ.

b) Ricavare la soluzione esatta del problema e giustificare perché il primo stato eccitato non riceve correzioni all'energia a tutti gli ordini in λ.

Problema 3

Sia data una particella confinata su di un cerchio di raggio R con Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,.$$

Assumendo che la funzione d'onda a $t = 0$ sia

$$\psi(\phi; 0) = \frac{\cos\phi}{\sqrt{\pi}}\,,$$

determinare la probabilità che la particella si trovi, a tempi molto grandi, nello stato fondamentale a causa della perturbazione dipendente dal tempo

$$V = \mu\, e^{-\gamma t}\cos\phi\,, \qquad \gamma > 0\,.$$

Usare la teoria delle perturbazioni al primo ordine in μ.

Nella risoluzione del Problema 2, si tenga conto che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = 1\,.$$