Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

19/02/2024

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m e spin 1/2, soggetta al potenziale

$$\hat{V} = \frac{m\,\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2\right) + \alpha\left(\hat{x}\sigma_2 - \hat{y}\sigma_1\right) e^{-\gamma t}, \qquad \gamma > 0\,,$$

con α costante reale e σ_i le matrici di Pauli. All'istante $t = 0$ la particella si trovi nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, con spin parallelo all'asse z, ovvero nello stato $|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle \otimes |+\rangle$. Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, e per tempi molto grandi,

a) ricavare verso quali stati può avvenire la transizione al primo ordine in α e con quali probabilità;

b) calcolare al secondo ordine in α la probabilità che la particella faccia una transizione allo stato $|2, 0, 0\rangle \otimes |+\rangle$.

Problema 2

Sia data una particella di massa m, vincolata a muoversi in una dimensione, sottoposta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < -2a, \\ -\dfrac{\gamma\hbar^2}{2m}\,\delta(x+a) - \dfrac{\gamma\hbar^2}{2m}\,\delta(x-a) & -2a < x < 2a, \\ +\infty & x > 2a \end{cases} \qquad \gamma,\, a > 0\,.$$

Ricordando che l'autofunzione dello stato fondamentale è una funzione **pari**, determinare per quali valori di γ esiste uno stato legato con energia negativa.

Problema 3

Una particella di massa m è descritta dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + x + iy + 3z\right) e^{-(x^2+y^2+z^2)/r_0^2}$$

dove $\mathcal{N}$ è la costante di normalizzazione ed r_0 è un parametro costante positivo. Calcolare i possibili valori di una misura di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$, con le corrispondenti probabilità.