Meccanica Quantistica
II compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

18/1/2024

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Si consideri il sistema di due fermioni **distinguibili** di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar}\,\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})} + B\left(\hat{S}_z^{(1)} + \hat{S}_z^{(2)}\right),$$

con A e B costanti. Al tempo $t = 0$, lo spin della prima particella punti nella direzione positiva dell'asse x e quello della seconda nella direzione individuata dal versore $(1, 1, \sqrt{2})/2$.
Al generico **tempo $\boldsymbol{t}$** determinare:

a) lo stato del sistema;

b) i valori della proiezione dello spin totale lungo l'asse z e le corrispondenti probabilità;

c) come dipendono dal tempo le probabilità ottenute? Spiegare il risultato.

Problema 2

Un oscillatore armonico monodimensionale con Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

si trova nel livello energetico con energia $\frac{5}{2}\hbar\omega$. Al tempo $t = 0$ si applica la perturbazione

$$\hat{H}_{\rm int}(t) = \mu\,\hat{p}\,e^{-\gamma t},$$

con μ e γ costanti e $\gamma > 0$. Calcolare, per tempi grandi, fino al secondo ordine perturbativo in μ, la probabilità che l'oscillatore si trovi nello stato fondamentale.

Problema 3

Due particelle **identiche** di spin 1/2, aventi coordinate spaziali x_1 ed x_2, sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right).$$

a) Determinare i primi due livelli energetici e la relativa degenerazione.

b) Determinare le correzioni all'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato dovute alla perturbazione

$$\hat{V} = A\,\delta(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)\,,$$

al primo ordine in A.

Formule utili

I primi due autostati di un oscillatore armonico monodimensionale di massa m e frequenza ω sono dati da

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= \langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}x_0^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}\right)\\ \phi_1(x) &= \langle x|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}x_0^{3/2}}\,x\,\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}\right)\end{aligned}$$

dove

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,.$$

Inoltre valgono i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-\beta x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}\,, \qquad \beta > 0\,.$$