

Meccanica Quantistica

I compito

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

12/12/2023

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Sia dato un sistema a tre livelli descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che si trova al tempo $t = 0$ nello stato

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Date le osservabili

$$\hat{A} = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- dire se \hat{A} e \hat{B} sono osservabili compatibili e, in caso affermativo, se formano un sistema completo;
- calcolare lo stato $|\psi(t)\rangle$ al generico istante t ;
- verificare che i valori di aspettazione di \hat{A} e \hat{B} sullo stato $|\psi(t)\rangle$ soddisfano il teorema di Eherenfest.

Problema 2

Sia dato il sistema descritto dall'operatore Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + \frac{m\omega^2}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) + \lambda \hat{L}_z, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e dalla funzione d'onda al tempo $t = 0$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \mathcal{N} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} + x + iy + z \right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2\right)$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e \mathcal{N} fattore di normalizzazione.

Determinare al **generico tempo t**:

- a) la funzione d'onda;
- b) i possibili risultati e le probabilità di una misura dell'energia;
- c) la probabilità che il sistema si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\tilde{\psi}(\vec{x}) = \mathcal{N}' \left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} - x + iy - z \right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

con \mathcal{N}' fattore di normalizzazione.

Problema 3

Sia data una particella di massa m in tre dimensioni nel potenziale centrale

$$V(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \gamma \delta\left(r - \frac{a}{2}\right) & r < a \\ +\infty & r > a \end{cases}$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e a e γ positivi.

- a) Disegnare qualitativamente la funzione d'onda per alcuni stati legati per un valore generico del numero quantico l del momento angolare orbitale.
Quanti sono gli stati legati?
- b) Per quali valori di γ esiste uno stato legato con energia negativa e $l = 0$?
- c) Quali dei livelli energetici del potenziale con $\gamma = 0$ e $l = 0$ rimangono livelli energetici quando $\gamma \neq 0$?

Formule utili

I primi due autostati di un oscillatore armonico monodimensionale di massa m e frequenza ω sono dati da

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}x_0^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}\right) \\ \phi_1(x) &= \langle x|1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}x_0^{3/2}} x \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}\right) \end{aligned}$$

dove

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$