Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

17/7/2023

Risolvere i seguenti esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m vincolata a muoversi nell'intervallo $[0, a]$ da due barriere di potenziale impenetrabili situate a $x = 0$ e $x = a$. La funzione d'onda al tempo $t = 0$ sia

$$\mathcal{N}\left(2\sin\frac{\pi x}{a} - 3\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione. Determinare **al tempo $\boldsymbol{t}$**:

a) i possibili valori di una misura dell'energia e le rispettive probabilità

b) il valor medio di $\hat{p}$

c) la probabilità che il sistema si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}'\left(\sin\frac{\pi x}{a} + 2\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

con $\mathcal{N}'$ costante di normalizzazione.

Problema 2

Si consideri il sistema di due fermioni distinguibili di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{A}{\hbar}\,\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(2)},$$

con A costante. Al tempo $t = 0$, lo spin della prima particella punti nella direzione individuata dal versore $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$ e quello della seconda nella direzione individuata dal versore $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$.

Determinare i valori dello spin totale e della sua proiezione lungo l'asse z, con le corrispondenti probabilità, al generico tempo t.

Problema 3

Una particella di massa m, soggetta al potenziale armonico $\frac{1}{2}m\,\omega^2(x^2+y^2+z^2)$, è descritta al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}\,(x - iy + 3z)\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+y^2+z^2\right)},$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

a) Calcolare i possibili valori di una misura di $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$, con le corrispondenti probabilità, al tempo $t = 0$.

b) Determinare la probabilità che, a tempi grandi, il sistema si trovi nello stato fondamentale, per effetto della perturbazione

$$\hat{H}_1 = A\,(\hat{y} + \hat{z})\,e^{-\gamma t}\,, \qquad \gamma > 0\,,$$

con A costante.