# Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

17/2/2023

Risolvere i seguenti esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

## Problema 1

Due particelle distinguibili di massa $m$ sono soggette al potenziale

$$V(x_1, x_2) = \frac{m\omega^2}{4}\left(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2\right).$$

Determinare:

a) i primi tre livelli energetici e la relativa degenerazione;

b) lo stato più generale che abbia energia $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ e il seguente valore di aspettazione

$$\left\langle (x_1 + x_2)^2\,(x_1 - x_2)\right\rangle = 2\sqrt{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}.$$

## Problema 2

Sia dato un sistema quantistico descritto dai tre stati $|a\rangle$, con $a = 1, 2, 3$, di energia $-\epsilon$, 0 e $\epsilon$, rispettivamente. Sia introdotta una perturbazione $\hat{V}$ i cui unici elementi di matrice non nulli sono

$$\langle 1|\hat{V}|3\rangle = \langle 3|\hat{V}|1\rangle = \lambda\,.$$

Determinare:

a) le correzioni ai livelli energetici al secondo ordine nella teoria delle perturbazioni in $\lambda$;

b) confrontare il risultato ottenuto con i livelli energetici esatti del problema.

## Problema 3

Una particella di massa $m$ è sottoposta al seguente potenziale armonico tridimensionale isotropo

$$V(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \equiv \frac{m\omega^2}{2} r^2\,,$$

e la sua funzione d'onda, a $t = 0$, sia

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N} z \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} r^2\right),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

a) Determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\vec{L}^2$, $L_x$, $L_y$ e $L_z$.

b) A $t = 0$ venga accesa la perturbazione

$$V(x, y, z, t) = A\, x\, e^{-\gamma t}\,,$$

con $A$ e $\gamma$ costanti positive. Determinare in quali livelli si può trovare il sistema per tempi grandi e la relativa probabilità, al primo ordine in $A$.