Meccanica Quantistica
II compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

12/1/2023

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Si consideri il sistema di due fermioni **distinguibili** di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{A}{\hbar}\,\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})} + \frac{\mu}{\hbar}\left(\hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_+^{(2)} \,+\, \hat{S}_-^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}\right),$$

dove $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, con A e μ costanti.

a) Determinare i livelli energetici del sistema e i corrispondenti autovettori.

   Suggerimento: si consiglia di scrivere l'Hamiltoniana come una matrice di dimensione quattro nella base del momento angolare totale.

b) Al tempo $t = 0$, lo spin della prima particella punti nella direzione positiva dell'asse z e quello della seconda nella direzione positiva dell'asse x.

   Qual è la probabilità che al tempo t il momento angolare totale sia zero?

Problema 2

Una particella di spin 1/2, vincolata a muoversi su un cerchio di raggio R, si trova nello stato fondamentale e ha lo spin che punta nella direzione positiva dell'asse z. A $t = 0$ viene accesa una perturbazione dipendente dal tempo e l'Hamiltoniana che descrive il sistema diviene

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{d^2}{d\varphi^2} + \lambda\left(\sigma_1\cos\varphi + \sigma_2\sin\varphi\right)e^{-\gamma t}\,, \qquad \gamma > 0\,,$$

con σ_i le matrici di Pauli e λ parametro reale.

a) Usando la teoria delle perturbazioni al **primo** ordine in λ:

   i) determinare la probabilità che la particella si trovi per tempi grandi nello stato descritto dalla funzione d'onda, avente componente spaziale data da

   $$\psi(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

ii) Quale sarà lo spin finale della particella?

b) Usando la teoria delle perturbazioni al **secondo** ordine in λ:

i) determinare la probabilità che la particella si trovi per tempi grandi nello stato descritto dalla funzione d'onda, avente componente spaziale data da

$$\psi(\varphi) = \frac{e^{2i\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

ii) Come dipende la probabilità trovata dalla direzione dello spin finale?

Problema 3

Due particelle **identiche** di spin 0 sono vincolate a muoversi in una dimensione e sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) + \mu\,\hat{p}_1\,\hat{p}_2\,, \qquad \mu > 0\,.$$

a) Determinare lo stato fondamentale e il primo e secondo stato eccitato per $\mu = 0$ e la relativa degenerazione.

b) Determinare, al primo ordine della teoria delle perturbazioni in μ, le correzioni all'energia dello stato fondamentale e del primo e secondo stato eccitato.

Facoltativo: confrontare con la soluzione esatta.