Meccanica Quantistica
I compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

1/12/2022

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

Problema 1

Una particella è vincolata a muoversi su di una sfera ed è descritta da una funzione d'onda $\psi(\theta, \phi)$, dipendente dalle variabili angolari $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$.

Al tempo $t = 0$ il sistema sia descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta, \phi, t = 0) = \mathcal{N}(\sin\theta \sin\phi + \cos\theta),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione, da determinare. Se l'Hamiltoniana che descrive il sistema è

$$\hat{H} = \frac{\mu}{\hbar} \hat{L}_z \,,$$

determinare al **tempo $\boldsymbol{t}$**:

a) la funzione d'onda;

b) il valor medio di $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$;

c) la probabilità che la particella si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\tilde{\psi}(\theta, \phi) = \mathcal{N}(\sin\theta \sin\phi - \cos\theta) \,.$$

Problema 2

Sia dato un oscillatore bidimensionale con Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4} \left(3\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 - 2\hat{x}\hat{y}\right).$$

Determinare:

a) le frequenze proprie di oscillazione e i livelli energetici del sistema;

b) il valor medio di $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{x}^2$ e $\hat{y}^2$ nello stato fondamentale.

c) Se all'Hamiltoniana viene aggiunto il termine

$$\mu \, \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \,,$$

cosa succede ai livelli energetici?

Problema 3

Sia dato il potenziale monodimensionale

$$V(x) = \begin{cases} +\dfrac{\hbar^2}{2m} \gamma \, \delta(x+a) & x \leq -a \\ -V_0 & -a < x < 0 \\ +\infty & x > 0 \end{cases} \qquad \gamma > 0, \; V_0 > 0, \; a > 0$$

a) Discutere l'esistenza di stati legati ad energia negativa al variare di V_0 e γ.

b) Calcolare il coefficiente di riflessione per una particella con $E > 0$.