

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

19/09/2022

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Due particelle **identiche** di massa m sono poste in una scatola tridimensionale di potenziale con pareti infinite e dimensioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{cases} \quad c > b > a.$$

a) Determinare l'energia minima e la funzione d'onda corrispondente nel caso in cui le due particelle siano:

- 1) bosoni di spin 0;
- 2) fermioni di spin 1/2 nello stato di **singoletto**;
- 3) fermioni di spin 1/2 nello stato di **tripletto**.

b) Le particelle interagiscono tra di loro con il potenziale

$$V = \alpha \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

con \vec{x}_1 e \vec{x}_2 le posizioni delle due particelle.

Trattando questo potenziale di interazione come una perturbazione, calcolare, al primo ordine in α , le correzioni all'energia minima nei casi 1), 2) e 3) discussi nel punto precedente.

Integrali utili

$$\int_0^\pi dx \sin^4(x) = \frac{3}{8}\pi$$

Problema 2

Sia data una particella di massa m , vincolata a muoversi in due dimensioni, e soggetta al potenziale

$$\hat{V} = \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \alpha \hat{x}^2 \hat{y}^2 + \frac{\alpha^2}{\hbar\omega} \hat{x}^4 \hat{y}^4,$$

con α costante reale. Determinare l'energia dello stato fondamentale al secondo ordine in α .

Problema 3

Si consideri il sistema di due fermioni distinguibili di spin $1/2$, aventi spin $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{A}{\hbar} \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)},$$

con A costante. Al tempo $t = 0$, lo spin della prima particella punta nella direzione positiva dell'asse z e quello della seconda nella direzione individuata dal versore $(0, 1, 1)/\sqrt{2}$.

- a) Determinare i valori della proiezione dello spin totale lungo l'asse z e le corrispondenti probabilità, al generico tempo t .
- b) Come dipendono dal tempo le probabilità ottenute? Spiegare il risultato.