Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

11/07/2022

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m, soggetta al potenziale armonico

$$V(\vec{x}) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

e descritta, ad un certo istante, dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{x}) = \mathcal{N}\,(x + iy)\exp\!\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $\mathcal{N}$ fattore di normalizzazione.

a) Determinare il valor medio $\langle \hat{p}_x\, \hat{p}_y \rangle$

b) Determinare i possibili risultati e le probabilità di una misura di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ ed $\hat{L}_z$.

Problema 2

Un sistema quantistico a due livelli è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}$$

e, all'istante $t = 0$, dalla stato

$$|\psi(0)\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}$$

Determinare al tempo $t = \dfrac{\pi}{4\epsilon}$

a) la probabilità che il sistema si trovi nello stato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) il valor medio dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Problema 3

Due fermioni **identici** di massa m sono posti in una scatola tridimensionale di potenziale con pareti infinite e dimensioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq b \end{cases} \qquad\qquad b > a\,.$$

a) Determinare l'energia minima e la funzione d'onda corrispondente nel caso in cui i due fermioni si trovino nello stato di **singoletto** e di **tripletto**.

b) Le particelle interagiscono tra di loro con il potenziale

$$V = \alpha\,\delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

con $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ le posizioni delle due particelle.

Trattando questo potenziale di interazione come una perturbazione, calcolare, al primo ordine in α, le correzioni all'energia minima nei casi di **singoletto** e di **tripletto**.

Integrali utili

$$\int_0^\pi dx\,\sin^4(x) = \frac{3}{8}\pi$$