Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

11/02/2022

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Sia data una particella di massa m vincolata a muoversi nell'intervallo $[0, a]$ da due barriere di potenziale impenetrabili situate a $x = 0$ e $x = a$. La funzione d'onda al tempo $t = 0$ sia

$$\mathcal{N}\left(\sin\frac{\pi x}{a} + 3\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione. Determinare **al tempo $\boldsymbol{t}$**:

a) i possibili valori di una misura dell'energia e le rispettive probabilità

b) il valor medio di $\hat{p}$

c) la probabilità che il sistema si trovi nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}'\left(3\sin\frac{\pi x}{a} - 4\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

con $\mathcal{N}'$ costante di normalizzazione.

Problema 2

Una particella di massa m, soggetta al potenziale armonico $\frac{1}{2}m\,\omega^2(x^2+y^2+z^2)$, è descritta al tempo $t = 0$ dalla funzione d'onda

$$\mathcal{N}\,(x + iy)\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+y^2+z^2\right)},$$

dove $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione.

a) Calcolare i valori di aspettazione di $\hat{L}^2$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ e $\hat{L}_z$, al tempo $t = 0$.

b) Determinare la probabilità che, a tempi grandi, il sistema si trovi nello stato fondamentale, per effetto della perturbazione

$$\hat{H}_1 = A\,(\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z)\,e^{-\gamma t}, \qquad \gamma > 0,$$

con A costante.

Problema 3

Si consideri il sistema di due fermioni distinguibili di spin 1/2, aventi spin $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})}$, interagenti tramite l'Hamiltoniana

$$\hat{H}_0 = \frac{A}{\hbar^2}\, \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{1})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathbf{2})},$$

con A costante. Calcolare la correzione all'energia dello stato di momento angolare totale zero, dovuta alla perturbazione

$$\hat{H}_1 = \frac{2\lambda}{\hbar^2} \left(\hat{S}_x^{(1)} \hat{S}_y^{(2)} - \hat{S}_y^{(1)} \hat{S}_x^{(2)} \right),$$

al secondo ordine nel parametro λ.