

# Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

24/01/2022

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

## Problema 1

Si consideri una particella libera di massa  $m$  in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo  $t = 0$  sia

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|} e^{ikx}$$

con  $\alpha > 0$  e  $k$  reale.

1. Determinare i valori medi  $\langle \hat{x} \rangle$  e  $\langle \hat{p} \rangle$  di posizione e impulso nello stato dato.
2. Scrivere l'equazioni del moto per  $\hat{x}_H(t)$  e  $\hat{p}_H(t)$  nella descrizione di Heisenberg, e risolvere il sistema delle due equazioni in termini dei valori di  $\hat{x}_H(0)$  e  $\hat{p}_H(0)$
3. Determinare i valori medi di  $\langle \hat{x}_H(t) \rangle$  e  $\langle \hat{p}_H(t) \rangle$  per ogni tempo  $t$ , tenendo in considerazione quanto trovato al punto 1.

## Problema 2

Due particelle identiche si muovono su un cerchio di raggio  $R$  e sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} + A \delta(\phi_1 - \phi_2).$$

Determinare l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato all'ordine  $\mathcal{O}(A)$  nel caso di:

1. bosoni di spin 0;
2. fermioni di spin 1/2 (non dimenticare della parte di spin degli stati).

## Problema 3

Si consideri il sistema formato da un elettrone e da un positrone. Si indichino con  $m$  e  $q$  la loro massa e il valore assoluto della loro carica, rispettivamente.

I risultati di una misura al tempo  $t = 0$  del momento angolare totale e della sua proiezione lungo l'asse  $z$  danno entrambi 0. I due leptoni sono soggetti ad un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$ . Trascurando i gradi di libertà spaziali, ovvero

considerando solo l'interazione del momento magnetico dei due leptoni col campo  $\mathbf{B}$ , determinare, al generico istante  $t$ ,

1. i possibili risultati e le probabilità di una misura della componente  $S_z^{(1)}$  dello spin della prima particella;
2. i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione del momento angolare totale  $S_z$ .