

Meccanica Quantistica

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

24/01/2022

Risolvere i seguenti tre esercizi.

Tempo assegnato: tre ore.

Problema 1

Si consideri una particella libera di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda al tempo $t = 0$ sia

$$\psi(x) = \sqrt{\alpha} e^{-\alpha|x|} e^{ikx}$$

con $\alpha > 0$ e k reale.

1. Determinare i valori medi $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$ di posizione e impulso nello stato dato.
2. Scrivere l'equazioni del moto per $\hat{x}_H(t)$ e $\hat{p}_H(t)$ nella descrizione di Heisenberg, e risolvere il sistema delle due equazioni in termini dei valori di $\hat{x}_H(0)$ e $\hat{p}_H(0)$
3. Determinare i valori medi di $\langle \hat{x}_H(t) \rangle$ e $\langle \hat{p}_H(t) \rangle$ per ogni tempo t , tenendo in considerazione quanto trovato al punto 1.

Problema 2

Due particelle identiche si muovono su un cerchio di raggio R e sono descritte dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_1^2} - \frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_2^2} + A \delta(\phi_1 - \phi_2).$$

Determinare l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato all'ordine $\mathcal{O}(A)$ nel caso di:

1. bosoni di spin 0;
2. fermioni di spin 1/2 (non dimenticare della parte di spin degli stati).

Problema 3

Si consideri il sistema formato da un elettrone e da un positrone. Si indichino con m e q la loro massa e il valore assoluto della loro carica, rispettivamente.

I risultati di una misura al tempo $t = 0$ del momento angolare totale e della sua proiezione lungo l'asse z danno entrambi 0. I due leptoni sono soggetti ad un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$. Trascurando i gradi di libertà spaziali, ovvero

considerando solo l'interazione del momento magnetico dei due leptoni col campo \mathbf{B} , determinare, al generico istante t ,

1. i possibili risultati e le probabilità di una misura della componente $S_z^{(1)}$ dello spin della prima particella;
2. i possibili risultati e le probabilità di una misura della proiezione del momento angolare totale S_z .