# Meccanica Quantistica
# II compitino

Carlo Oleari e Alberto Zaffaroni

13/01/2022

Risolvere due dei seguenti esercizi.

Tempo assegnato: due ore.

## Problema 1

Siano date due particelle distinguibili di spin 1/2, la cui interazione sia descritta dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{\hbar}\,\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}\,, \qquad\qquad \epsilon > 0\,,$$

con $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$ ed $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$ gli operatori di spin della particella 1 e 2, rispettivamente.

1. Scrivere i livelli energetici e i corrispondenti autostati in termini del momento angolare totale.

2. Si aggiunga la perturbazione

$$\hat{W} = \mu\left(S_x^{(1)} - S_x^{(2)}\right)\,.$$

Determinare:

(a) la correzioni all'energia dello stato di momento angolare totale 0 all'ordine $\mathcal{O}(\mu^2)$;

(b) la correzioni all'energia degli stati di momento angolare totale 1 all'ordine $\mathcal{O}(\mu)$.

(c) **Facoltativo:** confrontare col risultato esatto.

## Problema 2

Una particella di spin 1/2 soggetta a un potenziale armonico isotropo

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

si trova nello stato fondamentale dell'oscillatore e ha spin diretto nella direzione positiva dell'asse $z$. Al tempo $t=0$ viene accesa la perturbazione

$$A\left(x^2\sigma_1 + y^2\sigma_2 + z^2\sigma_3\right)e^{-\gamma t}\,, \qquad \gamma > 0\,,$$

dove $\sigma_i$, $i = 1,2,3$, sono le tre matrici di Pauli. Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine, determinare, per tempi grandi,

1. in quali livelli eccitati si potrà trovare la particella e con che probabilità;
2. la probabilità che il suo spin sia diretto nella direzione negativa dell'asse $z$.

## Problema 3

Si considerino due particelle di massa $m$ e carica $q$ in moto lungo l'asse $x$, soggette allo stesso potenziale armonico, avente frequenza $\omega$, e interagenti tra di loro con una forza elastica, di pari frequenza. In aggiunta, è presente un campo elettrico $\mathcal{E}$, parallelo all'asse $x$, che agisce sulle due cariche. Il potenziale è quindi dato da

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1 - x_2\right)^2 - q\mathcal{E}\left(x_1 + x_2\right).$$

con $x_1$ e $x_2$ le posizioni delle due particelle.

1. Si determini il cambio di coordinate che permette di scrivere l'Hamiltoiana $\hat{H}$ come somma di due Hamiltoniane di oscillatori armonici indipendenti.
2. Calcolare le funzioni d'onda e le energie dei primi tre livelli più bassi del sistema.
3. Se le particelle sono identiche e sono bosoni di spin 0, quali dei livelli energetici del punto 2) sono permessi e qual è la funzione d'onda per questi stati?
4. Se le particelle sono identiche e sono fermioni di spin 1/2, quali dei livelli energetici del punto 2) sono permessi e qual è lo spin totale di ognuno dei corrispondenti stati?