Meccanica Quantistica

Complementi di Meccanica Quantistica

Carlo Oleari

29/10/2009

Svolgere in dettaglio i seguenti problemi. Scrivere in modo chiaro e ordinato le soluzioni.

Problema 1

Si consideri un atomo idrogenoide sul quale incide un'onda elettromagnetica piana descritta dal potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = A_0\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + A_0^*\,\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\,e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\,,$$

dove A_0 è una costante complessa ed $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ è il versore di polarizzazione.

1. Trascuarando le correzioni relativistiche proporzionali a $\mathbf{p}^4$ e gli effetti di spin del nucleo, scrivere l'Hamiltoniana del sistema, dopo aver fissato il gauge.
2. Scrivere l'espressione del campo elettrico $\mathcal{E}$ e magnetico $\mathcal{B}$.
3. Scrivere esplicitamente i termini di interazione di dipole elettrico, dipolo magnetico e quadrupolo elettrico.
4. Ricavare le regole di selezione per transizioni di quadrupolo elettrico.

Problema 2

Un pione π^- (particella con spin zero e parità intrinseca dispari) è inizialmente legato ad un nucleo di ^2H (la parità intrinseca del protone e del neutrone è pari) e forma uno stato con numeri quantici $^3P_2$ $\left(^{2S+1}L_J\right)$. Successivamente viene catturato dall' ^2H e il sistema decade (via interazioni forti) in

$$\pi^- + {}^2H \to \Delta^- + p\,,$$

dove Δ^- è un barione di spin 1/2 e con parità intrinseca pari. Se il sistema legato prima di decadere è completamente polarizzato lungo l'asse z

1. determinare i valori dello spin, del momento angolare orbitale dello stato finale.
2. Scrivere il più generico stato che descrive il sistema decaduto.
3. Qual è la distribuzione angolare di probabilità (in funzione degli angoli θ e ϕ relativi all'asse delle z) di trovare entrambe le particelle finali con lo spin parallelo all'asse z? Si ricorda che la probabilità totale deve integrarsi ad 1.

Se invece il sistema fosse decaduto in

$$\pi^- + {}^2H \to n + n\,,$$

con gli stessi numeri quantici, quale sarebbe la probabilità di trovare gli spin dei neutroni antipararalleli? Si fa notare che lo stato finale ora è formato da due fermioni identici.

Supporre valida la separazione dei gradi di libertà di spin da quelli spaziali.

Problema 3

Se una piccola sfera uniformemente carica di raggio r_0 è posta in un potenziale elettrostatico $V(\mathbf{r})$, il suo potenziale può essere approssimato dall'espressione

$$U(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + \frac{1}{10}\, r_0^2\, \nabla^2 V(\mathbf{r}) + \mathcal{O}\left(r_0^4\right),$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che punta al centro della sfera. Trattando quindi un elettrone come una piccola sfera uniformemente carica, e il termine in r_0^2 come una perturbazione rispetto al potenziale Coulombiano $V(\mathbf{r}) = -q^2/(4\pi\epsilon_0\, r)$

1. ricavate l'espressione per $U(\mathbf{r})$ di cui sopra;
2. calcolare la correzione all'energia per gli stati $1s$ e $2p$ al primo ordine in r_0^2 per un atomo di idrogeno;
3. valutare numericamente le correzioni trovate nel caso in cui $r_0 = 10^{-12}$ m.

Formulario

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$$

$$R_{20}(r) = 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right)$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} \exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right)$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar}{mc\alpha}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{coordinate cartesiane}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{coordinate cilindriche}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2\, r^2}L^2 \qquad \text{coordinate sferiche}$$

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty dx\, x^\beta \exp(-\alpha\, x) = \frac{1}{\alpha^{\beta+1}}\,\Gamma(\beta+1)$$

$$\Gamma(\beta+1) = \beta\,\Gamma(\beta) \qquad \Gamma(1) = 1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$