Meccanica Quantistica

Complementi di Meccanica Quantistica

Carlo Oleari

07/09/2009

Svolgere in dettaglio i seguenti problemi. Scrivere in modo chiaro e ordinato le soluzioni.

Problema 1

Si consideri la seguente Hamiltoniana approssimata per descrivere un atomo di idrogeno

$$H = H_0 + H_f$$

dove

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

e il termine di struttura fine H_f è dato da

$$H_f = \underbrace{-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8\,m^3\,c^2}}_{H_k} + \underbrace{\frac{g-1}{2\,m^2\,c^2}\,\frac{q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}}_{H_{SO}} + \underbrace{\frac{q^2}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\frac{\pi\,\hbar^2}{2\,m^2\,c^2}\,\delta(\boldsymbol{r})}_{H_D}.$$

1. Stimare gli ordini di grandezza dei termini in H_0 e in H_f e giustificare quindi l'uso della teoria delle perturbazione per calcolare gli effetti di H_f
2. Calcolare le correzioni all'energia degli stati di H_0 caratterizzati dal numero quantico principale $n = 2$ dovuti alla struttura fine.
3. Calcolarne esplicitamente i valori **numerici** in elettronvolt.

Problema 2

Una data buca di potenziale ammette i seguenti stati legati di particella singola

$$\Psi_a(x),\ \Psi_b(x),\ \Psi_c(x)\ldots, \quad \text{con} \quad E_a < E_b < E_c \ldots$$

Due particelle non interagenti tra di loro si trovano nella buca di potenziale. Calcolare:

1. l'energia totale dei **due** livelli con energia più bassa
2. la degenerazione di ognuno di questi due livelli energetici
3. la funzione d'onda che descrive le due particelle in ognuno dei due livelli (indicare con Ψ la parte spaziale e con $|S, S_z\rangle$ la parte di spin, dove S è lo spin totale)

per **ognuno** dei seguenti tre casi:

(a) due particelle distinguibili di spin 1/2,

(b) due particelle identiche di spin 1/2,

(c) due particelle identiche di spin 0.

Problema 3

Si consideri l'Hamiltoniana di una particella di carica q e massa m in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e dal potenziale scalare $\Phi(\mathbf{x})$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2 + q\,\Phi \equiv \frac{\mathbf{\Pi}^2}{2m} + q\,\Phi\,.$$

Usando il teorema di Ehrenfest, derivare l'equivalente quantistico della forza di Lorentz.

Formulario

$$\begin{aligned}
R_{20}(r) &= 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right)\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}\exp\left(-\frac{Zr}{2a_0}\right) \\
a_0 &= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar}{mc\alpha}
\end{aligned}$$